Mathématiques 2

PC **2017**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

L'objet du problème est une étude de la vitesse de convergence de suites réelles. Dans la partie I, on définit la vitesse de convergence d'une suite à valeurs réelles et on en étudie quelques propriétés. Le but de la partie II est d'obtenir, dans différents cas issus des probabilités, des majorations de suites convergentes vers 0.

Les parties I et II sont indépendantes.

I Vitesse de convergence d'une suite réelle

Dans cette partie, on utilisera les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes telles que
$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ u_k \neq \lim_{n\to\infty} u_n$$
- à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ, on associe la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par
$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$
- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
  - lente si $\ell^c = 1$,
  - géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in \,]0,1[$,
  - rapide si $\ell^c = 0$;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{|u_n-\ell|^r}$ est bornée ;
- on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0}$.

I.A – Des résultats généraux

I.A.1) Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

I.A.2) L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

I.A.3) Montrer que E^c est strictement inclus dans E.

I.A.4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E^c. Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0,1]$.

I.B – Exemples de calcul de vitesse de convergence

I.B.1) Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

I.B.2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

b) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.B.3) On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et appartient à E.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite (I_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.B.4) Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.C – Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

I.C.1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

I.C.2)

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est un élément de E. On note s la limite de cette suite.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant s - S_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

c) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

d) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r.

I.C.3) On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ.

a) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

c) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

d) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, 2, ..., r-1\}$, $f^{(k)}(\ell) = 0$.

II Autour de la loi faible des grands nombres

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont réelles discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire X d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X.

Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment exponentiel d'ordre α si la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

On pourra utiliser les deux propriétés suivantes sans avoir besoin de les démontrer. Soit n un entier strictement positif et soit $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors :

- si f est une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_1), ..., f(X_n)$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes ;
- si les n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont d'espérance finie, alors la variable aléatoire $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$.

II.A – Préliminaires

Les trois questions de ces préliminaires sont indépendantes.
On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique, que l'on note cosh, est définie, pour tout réel t, par

$$\cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

II.A.1)

a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2/2}$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

II.A.2) Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Montrer que $\forall \lambda \in [0,1]$, $\mathrm{e}^{\lambda a+(1-\lambda)b} \leqslant \lambda \mathrm{e}^a + (1-\lambda)\mathrm{e}^b$.

II.A.3) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et admettant une limite finie en $+\infty$.

a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = t\mathrm{e}^{\gamma t}$ où γ est un réel strictement négatif, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

II.B – Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

II.B.1) Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α. Montrer que la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\alpha X}$ admet une espérance finie.

II.B.2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha X})$ dans ce cas.

a) X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

b) Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, où p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

c) Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p, où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

II.C – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans les sous-parties II.C et II.D, on considère ε un réel strictement positif, X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p,\, p \in \mathbb{N}\}$, et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X.

Pour tout entier n strictement positif, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Dans cette sous-partie II.C, on suppose que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α où α est un réel strictement positif.

II.C.1)

a) Montrer que la variable X admet une espérance finie. On notera m l'espérance de X.

b) Appliquer, avec les justifications utiles, la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires (X_k).

II.C.2)

a) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$.

b) Montrer que la fonction Ψ est dérivable sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ et déterminer sa fonction dérivée.

II.C.3) On considère l'application f_ε définie par

$$f_\varepsilon : \begin{cases} [-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \mathrm{e}^{-(m+\varepsilon)t}\Psi(t) \end{cases}$$

a) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f_\varepsilon'(0)$.

b) En déduire qu'il existe un réel t_0 appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.

II.C.4) Montrer que pour tout réel t appartenant au segment $[-\alpha, \alpha]$ et tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire réelle e^{tS_n} admet une espérance égale à $\big(\Psi(t)\big)^n$.

II.C.5)

a) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0,\alpha]$ et soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{tS_n} \geqslant \left(\mathrm{e}^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right)$, puis que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant \left(f_\varepsilon(t)\right)^n$.

b) En déduire qu'il existe un réel r appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant r^n$.

II.C.6) Montrer que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$ est majorée par une suite de limite nulle et dont la vitesse de convergence est géométrique. Comparer ce résultat à la majoration obtenue avec la loi faible des grands nombres.

II.D – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans cette sous-partie II.D, on suppose qu'il existe un réel c strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète X vérifie $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leqslant c$.

II.D.1) Montrer que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.

Les fonctions Ψ et f_ε des questions II.C.2 et II.C.3 sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.

II.D.2) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{X}{2c}$.

a) Vérifier que $X = -cY + (1-Y)c$.

b) Montrer que $\mathrm{e}^X \leqslant Y\mathrm{e}^{-c} + (1-Y)\mathrm{e}^c$.

II.D.3)

a) Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^X) \leqslant \cosh(c)$.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Psi(t) \leqslant \cosh(ct)$.

II.D.4) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_\varepsilon(t) \leqslant \exp(-t\varepsilon + \dfrac{1}{2}c^2t^2)$.

II.D.5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2})$.

II.D.6) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0,1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n,p).

À l'aide de la question précédente, majorer $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$ en fonction de n, p et ε.

• • • FIN • • •
