Mathématiques 1

Présentation du sujet

Après avoir défini la suite des nombres de Bell dont le terme général est le cardinal de l'ensemble des partitions d'un ensemble fini à n éléments, le problème explore quelques propriétés de cette suite, en lien avec la suite des polynômes de Hilbert. La partie I et le début de la partie II, plus tournées vers la combinatoire, ont pour but d'installer des formules sommatoires. La suite du problème exploite ces formules dans le domaine de l'analyse, de l'algèbre des polynômes et de l'algèbre linéaire. La partie IV aborde également les probabilités par le biais des fonctions génératrices et plus particulièrement la loi de Poisson.

Analyse globale des résultats

Le sujet recouvre assez largement le programme de PC, par des questions que l'on peut qualifier de classiques. Il devait permettre aux candidats d'utiliser leurs connaissances dans les domaines de l'algèbre, l'algèbre linéaire, l'analyse, les probabilités, le dénombrement, l'informatique. Il est de longueur raisonnable et faisable en 4 heures. Ce sujet aurait dû par ses questions proches du cours favoriser les très bonnes notes, ce qui n'a pas été le cas. Le début du problème traite du dénombrement et plusieurs questions sont inaccessibles au raisonnement purement calculatoire, ce qui a perturbé de nombreux candidats. Les réponses devaient détailler une démarche, ce qui a mené à des explications parfois confuses, mais aussi à de jolies descriptions. L'écriture d'une fonction récursive en langage Python a été bien traitée, c'est une bonne surprise. Les parties II et III abordaient des questions classiques alternant récurrences, raisonnements sur les séries entières, équations différentielles, polynômes : on constate ici que la rigueur est rarement au rendez vous et que les savoir-faire et les techniques fondamentales ne sont pas assimilées pour une bonne partie des candidats. La partie IV est intégralement consacrée aux fonctions génératrices ; elle comporte une coquille d'énoncé qui n'a apparemment pas perturbé les candidats. Il était nécessaire dans cette partie de bien maitriser le cours sur les séries de fonctions et les bons candidats ont pu ainsi s'y exprimer. Le début de la partie V est très abordable et plutôt bien réussi.

Mis à part le tiers supérieur, le niveau des copies est nettement insuffisant : défaut de justifications, rédaction bâclée, théorèmes approximatifs, hypothèses non citées, calculs interminables, cas particuliers systématiquement oubliés. Il existe une réelle disproportion entre les candidats soucieux de rigueur qui précisent clairement les éléments importants de leur raisonnements et ceux qui n'ont comme objectif que d'avancer rapidement dans le problème : un résultat exact ne fournit en aucun cas la totalité des points à la question. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la mise en forme sont bien entendu pris en compte dans l'évaluation.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Réponses apportées

I.A – Cette question a dérouté de très nombreux candidats qui sont pour la plupart partis dans des considérations trop compliquées ne sachant pas exactement ce qu'il fallait prouver : à leur décharge ce type de question est rarement abordé. Les démarches de dénombrement utilisées dans les copies, très variées, sont souvent basées sur des erreurs de raisonnement. L'utilisation d'une récurrence sur n a été parfois tentée mais la mise en forme correcte est délicate. Les meilleures solutions sont le plus souvent courtes, et reposent sur la remarque que $\mathrm{card}(P(\llbracket 1,n\rrbracket) = 2^n$, ce qui impose un nombre fini de choix pour chacune des k parties de la partition, ou sur une correspondance entre les partitions en k parties de $\llbracket 1,n\rrbracket$ et les surjections de $\llbracket 1,n\rrbracket$ dans $\llbracket 1,k\rrbracket$. À noter la confusion entre cardinal et dimension que l'on retrouve à d'autres moments dans le problème, comme c'est d'ailleurs le cas pour de nombreux termes proches comme appartenance et inclusion, somme et réunion, ensemble et cardinal de l'ensemble.

I.C – Cette question, pour laquelle la démarche était suggérée a été bien mieux réussie et sa rédaction a souvent été claire.

I.D.1) Question bien traitée en général, c'est une bonne surprise. Sur certaines copies la multiplication des conditions d'arrêt alourdit inutilement la fonction.

I.D.2) Il fallait ici entamer une récurrence, rarement mise en forme correctement : par exemple la formule de récurrence sur la complexité était $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1) + 1$, et non $C(n,k) = C(n-1,k) + kC(n-1,k-1)$ comme on le voit sur de nombreuses copies. Cependant, cette question aurait pu poser problème car posée ainsi elle est incorrecte : en effet, si un candidat a écrit une condition d'arrêt pour $k = 1$ par exemple, le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul de $S(n,k)$ n'est pas supérieur ou égal à $\binom{n}{1}$. Il est difficile de demander aux candidats de montrer que l'algorithme qu'ils ont écrit vérifie une certaine complexité sans imposer trop de contraintes sur cet algorithme.

II.A – Question facile et bien traitée.

II.B – Cette question n'a été que très rarement bien traitée, la plupart des candidats on tenté en vain de l'aborder à l'aide d'une récurrence basée sur la formule du **I.C** –. L'approche par dénombrement était semble-t-il incontournable et on peut regretter que l'énoncé ne le signale pas. Quelques rares candidats ont pu ici montrer leur très bon niveau.

II.C – L'approche évidente par récurrence forte a été souvent abordée. Quelques candidats ont tenté sans succès de montrer la décroissance de la suite

II.D – Question très facile dont le taux de réussite aurait dû voisiner les 100%. C'est sur ce type de questions que l'on constate le manque impressionnant de rigueur de nombreux candidats. Beaucoup trop de copies majorent directement le terme général de la série entière par z^n pour en conclure à la convergence de la série lorsque $z < 1$, sans penser à passer par les modules, ce qui ne les empêchent pas de citer le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs. On voit aussi souvent l'utilisation d'une réciproque du critère de d'Alembert.

II.E – Cette question qui faisait clairement appel au produit de Cauchy ne présentait pas de réelles difficultés : elle a été dans l'ensemble bien réussie. La justification $R' \geqslant \min(R, +\infty)$ sur les rayons de convergence ne figure que rarement sur les copies.

II.F – Application directe de la question précédente : le calcul de la constante est très souvent oublié pourtant f est clairement définie dans le texte et la question se pose naturellement.

III.A – Question facile assez bien traitée dans l'ensemble, mais la notion de famille échelonnée en degré, bien que figurant au programme (inutile donc de redémontrer la liberté d'une telle famille), n'est pas toujours définie clairement : on rappelle qu'il faut en donner le cardinal pour conclure qu'il s'agit d'une base, ou bien préciser que $\deg(H_k) = k$. On retrouve dans cette question la confusion entre la notion de cardinal et la notion de dimension.

III.B.1) Bien traitée dans l'ensemble.

III.B.2) Cette question nécessitait une récurrence, souvent mal rédigée. Les problèmes de bords sont souvent passés sous silence, et les changements d'indices doivent être formalisés.

III.C.1) On retrouve les problèmes évoqués au **II.D** – concernant des majorations dans $\mathbb{C}$.

III.C.2) Question bien traitée. Le fait que $K \in \mathbb{N}^*$ n'a pas gêné les candidats.

III.C.3) Cette question difficile nécessitait de prouver que f_k vérifiait elle aussi l'équation différentielle de **III.C.2)**, et pour cela de prouver que $f_{k-1} = g_{k-1}$. Il fallait donc mettre en place une récurrence pour enfin conclure par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Seuls les meilleurs candidats ont su maitriser ces trois étapes.

III.D 1) Question de cours qui aurait dû être mieux réussie.

III.D.2) Découlait directement de **III.D.1)** : la justification $u < \ln(2)$ pour ceux qui abordent la question laisse souvent à désirer.

IV.A – Il y avait une coquille évidente dans l'énoncé de cette question : il fallait lire « ... si Y^m possède une espérance ». Cela n'a semble-t-il pas perturbé les candidats. Les bonnes réponses sont variées, certaines utilisent la base (H_k), d'autres un équivalent ou la comparaison entre les suites n^m et t^n lorsque $t > 1$. Cependant l'importance de l'hypothèse $R > 1$ n'apparait pas toujours clairement.

IV.B.1) Cette question est rarement bien comprise et a permis aux très bons candidats de faire la différence : en effet beaucoup de candidats pensent que lorsqu'une série entière converge en un point, sa somme est continue ou dérivable en ce point et ferment l'intervalle sur lequel elle est C^∞ sans autre forme de procès.

IV.B.2) Assez bien réussie, cette question a permis à certains candidats qui ne l'avaient toujours pas précisé de donner enfin la formule de la fonction génératrice !

IV.B.3) Cette question a été souvent bâclée : rares sont les candidats qui ont introduit la loi de probabilité d'une variable aléatoire, et encore plus rares ceux qui ont vu qu'il fallait pondérer le terme $\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$. La majorité des copies s'attache à prouver que $R = 1$, sans penser aux moments d'ordre k.

IV.C – Cette question n'est abordée que sur les meilleures copies. L'expression de la fonction génératrice d'une loi de Poisson ne figure que très rarement.

V.A – Plutôt bien réussie, cette question a permis à de nombreux candidats de se remettre en selle, mais la rédaction est souvent elliptique : inégalités non justifiées, équivalents non justifiés, conclusion trop hâtive.

V.B – Bien traitée seulement sur un tiers des copies cette question facile est la preuve qu'un trop grand nombre de candidats ne maitrise pas les bases de l'algèbre linéaire : on voit trop souvent dans les réponses fausses des matrices ou figure l'indéterminée X, ou encore un mélange sur les bases de départ et d'arrivée.

V.C – Très rarement traitée.

V.D – On voit assez souvent l'expression du polynôme Q, mais **D.2)** et **D.3)** plus difficiles ne sont qu'exceptionnellement traitées correctement. On voit souvent qu'en dimension finie injective équivaut à bijective sans parler de l'égalité des dimensions, on ne vérifie jamais que $\operatorname{Im}(\Phi) \subset G$. Cette question a été l'occasion pour les meilleurs d'engranger des points.

V.E – À part l'expression du polynôme $P_1(X)$. Cette question n'est quasiment jamais traitée.

Conseils

Les conseils en la matière sont bien connus. Tout d'abord, il faut accorder de l'importance à la rédaction, éviter les fautes d'orthographes et les phrases qui n'ont pas de sens. Il faut utiliser un langage précis et ne pas confondre les concepts comme appartenance et inclusion, dimension et cardinal. Il faut par exemple éviter la confusion entre la fonction f et sa valeur $f(x)$ en un point : on ne dit pas « $f(x)$ est dérivable » mais « f est dérivable en x ». Il faut éviter les affirmations non justifiées, sauf lorsqu'elles sont évidentes. Il faut construire les raisonnements en donnant des arguments et donc énoncer les propriétés du cours, ou du moins y faire référence. Il faut définir les variables et pour cela utiliser des quantificateurs. Le but n'est pas d'arriver à un résultat le plus rapidement possible, d'ailleurs souvent faux, mais de montrer que l'on est capable de développer une argumentation. Tout cela est bien connu des étudiants mais trop peu en font cas. La correction tient compte explicitement ou implicitement de tous ces éléments. Et dernier conseil évident : il faut avant tout bien connaitre le cours.

Conclusion

En résumé, ce sujet classique a permis un tri efficace et mis en évidence pour une partie des candidats un défaut de préparation.