Mathématiques 2

TSI **2017**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Ce sujet comporte deux parties indépendantes.

I Étude des torseurs

Les torseurs sont des outils mathématiques utilisés en mécanique du solide indéformable.

On considère un solide indéformable Σ. Si A est un point de ce solide et si $\vec{V}(A)_{\mathcal{R}}$ désigne la vitesse du point $A \in \Sigma$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, il est bien connu que, pour tous points A et B de Σ, on a

$$\vec{V}(B)_{\mathcal{R}} = \vec{V}(A)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

où $\vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$ est un vecteur (un pseudo-vecteur en réalité) appelé *vecteur instantané de rotation* du solide Σ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

L'application $A \mapsto \vec{V}(A)_{\mathcal{R}}$ est appelé *torseur cinématique*.

Cette partie se propose de dégager la théorie liée aux torseurs.

Notations

- $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace géométrique orienté usuel de dimension 3 et on considère O un point fixé de $\mathcal{E}$.
- On note $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ et on considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

On appelle *torseur* toute application $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$ pour laquelle il existe un vecteur $\vec{r}$ tel que que la relation $\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AB}$ est vérifiée pour tous points A et B de $\mathcal{E}$.

I.A – L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

I.A.1) Soit $\vec{r}$ un vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$. Montrer que l'application $\mathcal{M} : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ est un torseur.

I.A.2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des torseurs est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}})$ des applications de $\mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$.

I.A.3)

a) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Rappeler, sans démonstration, une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

b) Soit $\mathcal{M}$ un torseur. Montrer que le vecteur $\vec{r}$ de la définition est unique.

Il s'appelle la *résultante* du torseur $\mathcal{M}$. On admet que l'application $\begin{cases} \mathcal{T} \to \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \vec{r} \end{cases}$ est linéaire.

I.A.4) Vérifier qu'une application constante de $\mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$ est un torseur et en donner la résultante. Un tel torseur s'appelle un *couple*. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{cases} \mathcal{C} \to \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}(O) \end{cases}$ est un isomorphisme.

En déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

I.A.5) On appelle *glisseur* tout torseur qui s'annule en au moins un point de $\mathcal{E}$.

a) Soit O_1 un point de $\mathcal{E}$ distinct de O et $\vec{r}$ un vecteur non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{OO_1}$. On note $g_0 : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $g_1 : A \mapsto \vec{r} \wedge \overrightarrow{O_1A}$.

Montrer que g_0 et g_1 sont des glisseurs, mais que $g_0 - g_1$ n'en est pas un. Expliquer pourquoi l'ensemble $\mathcal{G}$ des glisseurs n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}_O$ des glisseurs s'annulant en O est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{cases} \mathcal{G}_O \to \vec{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} \mapsto \vec{r} \end{cases}$, où $\vec{r}$ est la résultante de $\mathcal{M}$, est un isomorphisme.

En déduire la dimension de $\mathcal{G}_O$.

c) Démontrer que $\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_O$. Quelle est la dimension de $\mathcal{T}$?

I.B – Équiprojectivité

I.B.1) Démontrer que, si $\mathcal{M}$ est un torseur alors $\mathcal{M}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{M}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \mathcal{M}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Cette propriété est connue sous le nom de propriété d'équiprojectivité.

On se propose d'étudier la réciproque.

I.B.2) Question préparatoire

a) Rappeler la définition d'une matrice antisymétrique.

b) L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on identifie tout vecteur avec la matrice colonne 3×1 contenant ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{r}$, dont on donnera les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, tel que

$$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{E}}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{u}$$

I.B.3) Soit $f : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}$ une application telle que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot f(\vec{v})$.

a) Montrer que f est linéaire.

Pour λ et μ deux nombres réels, on pourra considérer le vecteur $\vec{w} = f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda f(\vec{u}) - \mu f(\vec{v})$ et montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice antisymétrique.

c) Démontrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{r} \in \vec{\mathcal{E}}$ tel que pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, $f(\vec{u}) = \vec{r} \wedge \vec{u}$.

I.B.4) Soit $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$ une application vérifiant la propriété d'équiprojectivité. Montrer alors que $\mathcal{M}$ est un torseur.

On pourra considérer l'application $f : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}$ définie pour tout vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ par $f(\vec{u}) = \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)$ où O' désigne le translaté du point O par le vecteur $\vec{u}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.

II Produits infinis

II.A – Définitions et premières propriétés

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour $N \geqslant n_0$, on pose

$$P_N = u_{n_0}\, u_{n_0+1} \cdots u_N = \prod_{n=n_0}^{N} u_n$$

La suite $(P_N)_{N \geqslant n_0}$ est appelée *suite des produits partiels* associée à $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

On dit que *le produit infini* $\prod\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ *converge* si la suite $(P_N)_{N \geqslant n_0}$ admet une limite finie **non nulle**. Cette limite est notée $\prod\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et est appelée *valeur* du produit infini. Si $(P_N)_{N \geqslant n_0}$ est divergente ou de limite nulle, on dit que *le produit infini* $\prod\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ *diverge.*

II.A.1) Produits téléscopiques

a) Montrer que $\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N}$.

En déduire la divergence du produit infini $\displaystyle\prod_{n \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) Justifier que $\displaystyle\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n}\right)\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n}\right)$.

En déduire la convergence et la valeur du produit infini $\displaystyle\prod_{n \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

II.A.2) Conditions nécessaires de convergence

a) Montrer que si $\prod\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.

b) Montrer, en considérant le quotient $\dfrac{P_{N+1}}{P_N}$ que si $\prod\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

c) La condition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ est-elle suffisante pour que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge ?

II.A.3) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels strictement positifs.

a) Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \ln(u_n)$ converge. Préciser alors la relation entre $\prod\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)$.

b) Montrer que si, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < u_n < 1$ alors le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant n_0} (1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge.

c) Soit q un nombre réel appartenant à $[0,1[$ quelle est la nature du produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 1}(1-q^n)$?

II.B – Développement en produit infini de $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

On se propose dans cette sous-partie de démontrer que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

II.B.1) Expliquer pourquoi il suffit de démontrer cette égalité pour tout $x \in \left]0,1\right[$.

Dans toute la suite de cette sous-partie II.B, x est un réel fixé appartenant à l'intervalle $\left]0,1\right[$.

II.B.2) Prouver la convergence du produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

II.B.3)

a) Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$.

b) On définit la fonction f, 2π-périodique, par $\forall t \in \left]-\pi,\pi\right]$, $f(t) = \cos(xt)$.

Représenter graphiquement la fonction f dans le cas particulier où $x = 1/2$.

Dans le cas général où $x \in \left]-1,1\right[$, démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux.

Calculer les coefficients de Fourier de f.

c) En déduire, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, l'égalité

$$\cos(xt) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2}\cos(nt)\right)$$

d) Pour tout $t\in\mathbb{R}$ tel que $\sin t \neq 0$ on pose $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$. Montrer que,

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}$$

II.B.4)

a) À l'aide d'un développement limité en 0 de $u\cos u - \sin u$, calculer $\lim\limits_{t\to 0}\left(\pi\cot(\pi t) - \dfrac{1}{t}\right)$. En déduire la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^x \left(\pi\cot(\pi t) - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

b) Prouver l'existence et calculer la limite de $\ln\left(\dfrac{\sin(\pi\epsilon)}{\pi\epsilon}\right)$ quand ϵ tend vers 0.

c) En déduire que $I = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

d) Expliquer pourquoi la quantité $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\dfrac{2t}{n^2-t^2}$ est définie pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,1]$.

e) Justifier que $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\dfrac{2}{n^2-1} = 0$.

f) Montrer que

$$\forall t \in [0,1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

g) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \sum_{n=1}^{N} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

h) En déduire le développement en produit infini de $\sin(\pi x)$.

II.B.5) Deux applications

a)

i. Justifier la convergence du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

ii. À l'aide du développement en produit infini de $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ appliqué à un réel x bien choisi, donner la valeur du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

b) On introduit la *fonction* ζ *de Riemann* donnée par $\zeta(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

i. Prouver que ζ est définie sur $]1, +\infty[$.

ii. Écrire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$.

iii. On trouve dans les travaux d'Euler un « calcul formel » permettant d'obtenir la valeur de $\zeta(2)$. Il identifie les termes de degré 3 du développement limité de $x \mapsto \sin(\pi x)$ et de son développement en produit infini. Conjecturer la valeur de $\zeta(2)$ en utilisant cette méthode.

• • • FIN • • •