

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet présente la mesure quantitative de l'information. Il commence par des propriétés classiques du logarithme utiles dans tout le problème. Après avoir construit des fonctions permettant de modéliser l'information contenue dans les événements de probabilité, la notion d'entropie d'une variable aléatoire discrète est introduite. L'entropie est alors optimisée pour une variable aléatoire à valeurs entières et finies, puis pour une variable aléatoire entière d'espérance finie. L'avant dernière partie aborde l'entropie d'un couple de variables aléatoires et la notion d'entropie conditionnelle. La dernière relie la quantité d'information contenue dans un message aléatoire et le nombre minimal de questions récepteur-émetteur pour identification.

Cette épreuve est conforme au programme des deux années de la filière TSI. Les principales notions mathématiques introduites sont : fonction logarithme népérien, continuité, dérivation, fonction définie par une intégrale, somme, série, série entière, probabilité, lois usuelles en probabilité, variable aléatoire discrète.

## Analyse globale des résultats

Un nombre conséquent de candidats ont traité une grande partie du problème avec soin et rigueur. Cependant, le niveau général est décevant pour un sujet ne présentant pas de difficultés majeures et faisant appel à de nombreuses méthodes très classiques.

Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas certaines notions fondamentales en analyse (continuité, dérivabilité par exemple) ainsi que les questions d'existence de somme de séries. Le sujet demande à de nombreuses reprises de proposer une interprétation ou d'expliquer un point en français courant : si certains candidats en profitent pour compenser la faiblesse des arguments mathématiques, d'autres semblent mal à l'aise avec ce type de questions, voire n'y répondent pas du tout.

Malgré les efforts de présentation de la plupart des copies, certaines se rapprochent encore trop d'un brouillon. On attend aussi que les résultats soient encadrés et les arguments clés mise en évidence.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Il est fondamental de faire apparaître au correcteur de manière lisible, claire et concise les étapes qui mènent au résultat. Les réponses doivent être justifiées. Le candidat doit présenter les arguments mathématiques attendus pour répondre à la question posée. En particulier lorsque le résultat est donné dans l'énoncé, le correcteur attend qu'on explique comment y parvenir.

La plupart des candidats numérotent clairement les copies et les questions, mais pas tous : une numérotation partielle comme 2)a) ou B.3 gêne la lecture. Il faut numéroter toutes les questions. Il vaut mieux présenter les questions dans l'ordre de l'énoncé autant que possible.

Le sujet doit être traité à l'aide des notions du programme. Par exemple, on ne peut pas répondre à la question **I.B** en invoquant la concavité de la fonction  $\ln$ . Pour comparer, cette fonction à la fonction  $x \mapsto x - 1$ , on attendait l'étude de leur différence.

Plusieurs questions demandent de montrer une équivalence. Montrer séparément chacune des implications est souvent une bonne manière de procéder : dans ce cas, il faut séparer clairement chacune

des implications et, pour chaque partie du raisonnement, expliciter quelles sont les hypothèses utilisées.

Le sujet propose de prouver plusieurs inégalités et demande à plusieurs reprises de déterminer le cas d'égalité. Leur preuve est rarement donnée de manière satisfaisante.

Les demandes de justification avant calculs, par exemple « montrer qu'une fonction est dérivable » ou « montrer qu'une série converge », sont peu ou mal traitées, le candidat estimant à tort que calculer (« une dérivée » ou « une somme » par exemple) suffit à justifier l'existence.

Une série est une suite alors que  $\sum_{n=n_0}^{+\infty}$  est un nombre, désignant la limite de la suite des sommes partielles. On peut l'écrire après avoir justifié la convergence de la série. Rappelons que si la série  $\sum u_n$  converge, alors la suite  $(u_n)$  converge vers 0. Trop de candidats ont invoqué la réciproque qui est fautive. Enfin, calculer des sommes sans bornes de sommation n'est pas correct.

Un nombre stupéfiant de copies proposent un argument du type «  $f$  est intégrable donc dérivable » ou «  $f$  est continue donc dérivable ». Certains candidats pensent au théorème fondamental de l'analyse mais ne parviennent pas à le mettre en œuvre.

Attention au maniement des inégalités en particulier quand il s'agit de multiplier par un nombre.

Le fait que la somme des probabilités d'un système complet d'évènements existe et vaut 1 n'est pas connue de tous les candidats.

Il faut savoir reconnaître et calculer des sommes classiques comme une somme géométrique et la somme de sa série dérivée.

La loi uniforme et la loi géométrique devraient être connues de tous.

Aux questions **IV.A.2** et **IV.A.3**, rappelons que les couples  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  suivent la même loi signifie que pour tous  $i$  et  $j$ ,  $\lambda_{ij} = \lambda'_{ij}$ . Même si la variable  $X'$  (resp.  $Y'$ ) suit la même loi que  $X$  (resp.  $Y$ ), l'indépendance de  $X'$  et  $Y'$  n'implique pas celle des variables  $X$  et  $Y$ .

## Conclusion

Malgré un nombre croissant de très bonnes copies, nous constatons comme chaque année une certaine carence dans l'acquisition des connaissances de base du cours de mathématiques, certaines notions fondamentales comme la continuité, la dérivabilité, la théorie des séries, étant encore trop mal assimilées. La partie probabilité du programme est mal maîtrisée. Les lois usuelles doivent être parfaitement connues.

Apprendre et comprendre le cours reste essentiel. Pour savoir l'appliquer, la recherche de nombreux exercices sur toutes les parties du programme des deux années de classe préparatoire, reste incontournable.