Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet, divisé en cinq parties, étudie l'opérateur Laplacien Δ sur l'espace des fonctions régulières définies sur l'espace $\mathbb{R}^n$. L'opérateur Laplacien est important car il apparait dans plusieurs équations fondamentales de la physique (équations des ondes, équations de Schrödinger, équations de la chaleur). Néanmoins, le sujet est auto-contenu et aucune question du sujet ne nécessite une connaissance préalable de l'opérateur Laplacien Δ.

La majeure partie du sujet concerne les propriétés des fonctions f vérifiant $\Delta f = 0$, plus connues sous le nom de « fonctions harmoniques ».

La première partie a pour but d'introduire les fonctions harmoniques, et notamment leur stabilité par somme ($\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g = 0+0$) et par multiplication par un scalaire ($\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f = 0$). Autrement dit, les fonctions harmoniques forment naturellement un espace vectoriel. Par contre, le produit de deux fonctions harmoniques quelconques n'est, en général, pas harmonique.

Le but de la deuxième partie est la résolution de l'équation $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ sous trois types d'hypothèses additionnelles sur f :

- si f est à variables séparées de la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$;
- si f est radiale, c'est-à-dire de la forme $u(r)$ où (r,θ) sont les coordonnées polaires usuelles ;
- et enfin, plus généralement, si $f(x,y)$ est de la forme $u(r)g(\theta)$ (forme appelée à variables polaires séparables).

L'avantage mathématique de ces trois types de forme est de réduire l'équation aux dérivées partielles $\Delta f = 0$ à une ou deux équations différentielles (à une variable).

La troisième partie étudie une propriété très importante des fonctions harmoniques : dans les conditions précisées par l'énoncé, leur maximum est forcément atteint au bord du domaine d'étude. Par exemple, pour maximiser une fonction harmonique sur un disque, il suffit d'examiner le comportement de la fonction sur le cercle. Ce phénomène est appelé « principe du maximum ». La quatrième partie établit alors une connexion surprenante, à savoir que toute fonction harmonique s'avère être la partie réelle d'une fonction développable en série entière. Cela éclaire pourquoi les fonctions harmoniques vérifient le « principe du maximum » (du moins sur un disque de $\mathbb{R}^2$).

La dernière partie, plus difficile, porte plus particulièrement sur le problème de Dirichlet : étant donnée une fonction f sur un cercle, peut-on la prolonger à l'intérieur du cercle en une fonction harmonique ? Sous une hypothèse de continuité de f, la toute dernière question montre l'existence et l'unicité d'un tel prolongement.

Analyse globale des résultats

La partie I, à priori très facile, n'a pas eu le succès escompté. Les deux difficultés suivantes (aux questions 2 et 3) furent récurrentes et sont la manifestation que le cours de calcul différentiel est mal assimilé par bon nombre de candidats :

- pour une grande majorité, les candidats considèrent que toutes les dérivées partielles sont de la forme $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_k^\alpha}$ et ne font pas mention des dérivées partielles croisées $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial_{x_{k_1}} \ldots \partial_{x_{k_\alpha}}}$;

- le jury a été surpris de constater qu'environ 70 % des candidats n'arrivent pas à déterminer les fonctions régulières dont toutes les dérivées partielles (d'ordre 1) sont nulles. Pourtant en dimension 1, le jury espère bien que ces candidats savent qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante.

La partie II contient beaucoup de questions abordables et beaucoup de candidats y ont puisé la majorité de leurs points. Les questions calculatoires sont souvent bien traitées. Signalons néanmoins les points récurrents qui ont interpellé le jury :

- près de 70 % de candidats passent de l'égalité $u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$ à $\dfrac{u''(x)}{u(x)} + \dfrac{v''(y)}{v(y)} = 0$ sous prétexte que u et v sont deux fonctions non identiquement nulles. Au-delà d'une faute mathématique, il s'agit d'un sérieux problème de réflexe : on ne peut pas diviser par zéro ! Or une fonction non identiquement nulle peut très bien s'annuler ;
- concernant la notion de fonction périodique, la quasi-totalité des copies (même les meilleures !) ont affirmé que la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{\lambda} x)$ est 2π-périodique quelle que soit la valeur de $\lambda > 0$.

La partie III est assez courte. Signalons que la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}^n$ semble assez bien comprise par les candidats.

La partie IV a un niveau bien plus élevé que les précédentes et contient des questions difficiles (notamment la démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss). De nouveau, les questions calculatoires sont bien faites.

La partie V est très difficile. Néanmoins, beaucoup de candidats y ont repéré deux questions calculatoires très faciles.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury a remarqué que bon nombre de candidats ont inventé un théorème de différentiabilité pour des séries $\sum f_n(x, y)$ de fonctions différentiables à deux variables. S'il est bien possible d'écrire un tel théorème, le jury rappelle que les sujets sont étudiés pour être cohérents avec le programme en vigueur.

Les extraits du rapport 2017 cités ci-après sont toujours d'actualité.

- Le jury rappelle aux candidats que tous leurs calculs sont lus et il est donc illusoire de simuler une bonne réponse avec des calculs hasardeux qui aboutissent, par magie, à la réponse demandée.
- Le jury souhaite préciser quelques recommandations sur l'usage de la calculatrice. Cette dernière est autorisée mais doit être utilisée de façon réfléchie. Si une question demande de vérifier un calcul avec une *valeur explicite*, alors le jury ne peut faire aucune distinction entre un candidat ayant réellement fait usage de la calculatrice et un candidat ayant seulement écrit « avoir fait usage de la calculatrice ». Les candidats doivent donc comprendre que l'usage de la calculatrice ne peut être valide dans ce contexte en vue d'une évaluation et par conséquent qu'une démonstration mathématique est attendue. À contrario, si une question nécessite un calcul *non donné dans l'énoncé* alors la démarche scientifique de l'usage de la calculatrice est parfaitement pertinente.

Un cas de conscience est apparu avec la **Q9.** demandant un calcul *non donné dans l'énoncé* d'une dérivée partielle seconde. Il s'avère que le calcul nécessite l'invocation du théorème de Schwarz autorisant un échange de dérivée partielle. Beaucoup de candidats ont fait l'effort d'écrire le calcul (long d'une page environ) en invoquant l'argument exact du théorème de Schwarz et ont donc bénéficié de tous les points. Le jury a choisi de ne pas valoriser les candidats ayant affirmé le résultat sans justification.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q1. Les candidats savent généralement vérifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace fixé à l'avance.

Q2. et **Q3.** Voir mention ci-dessus.

Q4. Deux erreurs fréquentes ont été rencontrées :

- tout d'abord, la notion de fonction harmonique est définie comme fonction à valeurs *réelles*, or bon nombre de candidats ont donné des exemples à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (avec a priori $n \geqslant 2$) ;
- ensuite l'énoncé pose une question fermée, est-il vrai que le produit de deux fonctions harmoniques f et g est aussi harmonique ? La démarche scientifique consiste ou bien à montrer la réponse pour toute paire de fonctions (f, g) ou bien à donner un contre-exemple sur une paire particulière (f, g). Or beaucoup de candidats ont montré que la stabilité de l'harmonicité par produit équivaut à la formule $\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} = 0$ puis s'arrêtent en énonçant qu'une telle formule est évidemment fausse. Cette démarche scientifique est donc à revoir.

II Exemples de fonctions harmoniques

Q5. Comme mentionné précédemment, les futurs candidats doivent prendre garde à la division par une fonction « non identiquement nulle ». Car même une fonction non identiquement nulle peut s'annuler !

Q6. La résolution d'une équation différentielle de la forme $y'' + \lambda y = 0$ est en général bien faite. Les futurs candidats doivent prendre garde que résoudre signifie « trouver toutes les solutions ». Cela signifie que l'on doit :

- soit raisonner par équivalence ;
- soit raisonner par implication et vérifier que les solutions finales sont convenables.

Q7. La question demande de vérifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$. Le jury apprécie moyennement la réponse « par les théorèmes généraux... ». Il est normal qu'un sujet contienne des questions faciles et abordables, les candidats ne doivent cependant pas les prendre à la légère : si la fonction étudiée est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on peut mentionner la régularité des fonctions coordonnées, si la fonction étudiée fait intervenir des fonctions usuelles, on peut alors les mentionner.

Q8. et **Q9.** La règle de la chaine permettant de dériver $\frac{\partial}{\partial \theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est généralement bien comprise.

Q10. La question contient un calcul souvent bien fait. Le jury rappelle de nouveau que « les correcteurs lisent *tous* les calculs ». Voici un oubli souvent constaté dans le cadre des changements de variables polaires : une fois une certaine formule vérifiée pour tous les couples $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, beaucoup de copies n'expliquent pas le passage aux couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Le jury rappelle d'ailleurs que la fonction

$$\begin{aligned}]0,+\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ (r,\theta) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

n'est pas bijective !

Q11. La question demande de chercher certaines fonctions f dépendant de $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ vérifiant une certaine propriété. Après changement de variables polaires, on devait trouver une fonction de la forme $(r,\theta)\mapsto A\ln(r)+B$. Environ 66 % des copies ne reviennent pas aux variables x et y, c'est-à-dire à $A\ln(\sqrt{x^2+y^2})+B$!

Q13. Une question très facile si l'on sait ce qu'est une fonction « non identiquement nulle », malheureusement 33 % de copies contenaient une réponse fausse.

Q14. Même remarque que la question 5.

Q15. On demande de trouver les fonctions 2π-périodiques vérifiant l'équation $z''=0$. Question très facile et bien réussie par les candidats ayant donné quelques arguments. Le jury n'a pas valorisé les réponses constituées d'une seule phrase sans aucune preuve.

Q16. Calcul bien fait en général.

Q18. L'ensemble des solutions de l'équation $z''+\lambda z=0$ est globalement bien connu dans le cas $\lambda\neq 0$:

- si $\lambda>0$, alors z est de la forme $t\mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}t)+B\sin(\sqrt{\lambda}t)$. Par contre, seules 142 copies savent trouver une condition sur $\sqrt{\lambda}$ pour obtenir des solutions 2π-périodiques non nulles. Le moyen le plus rapide est sans doute d'utiliser la forme équivalente $\sqrt{A^2+B^2}\cos(\sqrt{\lambda}t+\phi)$ pour arriver naturellement à la condition $\sqrt{\lambda}\in\mathbb{N}^\star$;
- si $\lambda<0$, alors z est de la forme $t\mapsto A\exp(\sqrt{-\lambda}t)+B\exp(-\sqrt{-\lambda}t)$ (ou une forme similaire avec des cosinus ou sinus hyperboliques). Par contre, seules 157 copies savent expliquer que la seule solution 2π-périodique est la solution nulle (en examinant les limites en $\pm\infty$).

Q19. et **Q20.** La condition $\lambda\neq 0$ est imposée dans l'énoncé. Pourtant beaucoup de candidats n'étudient pas le signe de λ dans leur résolution de l'équation différentielle de l'énoncé. Le jury signale une bonne surprise : le changement de fonction inconnue dans l'équation différentielle a été bien mené dans beaucoup de copies.

III Principe du maximum faible

Q21. Il fallait invoquer le théorème affirmant qu'une fonction réelle continue sur un compact admet un maximum. Mais encore fallait-il expliquer (ou au moins mentionner) que l'adhérence d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ constitue une partie compacte.

Q22. Il s'agit d'une question qui demande un minimum de rédaction. Une bonne surprise a été de constater que beaucoup de candidats connaissent le fait élémentaire suivant : si $\phi:]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui admet un maximum en 0 alors $\phi''(0)\leqslant 0$. Beaucoup moins de candidats savent démontrer rigoureusement cette propriété avec des formules de Taylor.

Q23. La question nécessite d'expliquer que la fonction $x\mapsto\|x\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Les résultats sont assez mitigés. D'une part, certains candidats ont fait appel au caractère polynomial de l'expression $\|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$, ce qui est très appréciable. D'autre part, certaines copies contenaient des erreurs flagrantes : « la fonction norme $\|\cdot\|$ est de classe $\mathcal{C}^2$ par les théorèmes généraux » ! Rappelons par ailleurs qu'il est classique qu'une norme n'est pas différentiable en l'origine.

Q24. On obtenait immédiatement une inégalité de la forme

$$\forall x \in U \qquad f(x) + \varepsilon \|x\|^2 \leqslant \sup_{y \in \partial U} \left(f(y) + \varepsilon \|y\|^2 \right)$$

Dans le membre droit, le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ ne peut pas être trivial ! Peu de candidats ont invoqué la compacité de ∂U pour arriver à

$$\forall x \in U \qquad f(x) + \varepsilon \|x\|^2 \leqslant \sup_{y \in \partial U} f(y) + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

qui est plus facilement exploitable pour un passage à $\varepsilon = 0$.

Q25. Question assez facile (il suffit de travailler avec $f_1 - f_2$ et $f_2 - f_1$). Seuls 15 % des copies contiennent une réponse satisfaisante.

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

Q26. Pour traiter cette question, il est conseillé de se ramener au théorème connu à une variable : on fixe d'abord une variable, par exemple y, puis on applique un théorème de permutation « série-dérivée » avec la série $\sum \frac{\partial}{\partial x} f_n(x, y)$. Il est ensuite aisé d'utiliser la caractérisation d'une fonction $\mathcal{C}^1$ en fonction de la continuité des dérivées partielles. La difficulté a été la présence de séries de fonctions à deux variables. Cette question a globalement été bien traitée par environ 200 copies.

Q27. On peut constater que u et v sont les parties réelle et imaginaire de f mais encore faut-il justifier que f est harmonique (cela découle des calculs faits dans la question 26).

Q28. Question bien traitée dans beaucoup de copies. Voici néanmoins un point qui n'a presque jamais été souligné dans les copies : la fonction f ne s'annulant pas, il fallait justifier que $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme f est à valeurs complexes, et donc dans $\mathbb{C}^\star$, il ne semble pas évident que les théorèmes généraux du programme englobent ce cas de figure. Une démonstration rigoureuse consiste à décomposer $f = u + \mathrm{i}v$ et d'appliquer les théorèmes généraux à l'expression $\dfrac{1}{f} = \dfrac{u - \mathrm{i}v}{u^2 + v^2}$.

Q29. Question bien traitée dans 266 copies. L'argument le plus court est de remarquer que uv est, à coefficients multiplicatif près, la partie imaginaire de $f^2 = (u + \mathrm{i}v)^2$ (qui est développable en série entière).

Q30. Bien traitée dans 15 % des copies.

Q31. Question difficile. Moins de 50 copies ont obtenu des réponses satisfaisantes.

Q32. Il s'agit d'une question à la fois facile et dans l'esprit du programme. Malheureusement, l'interversion série/intégrale a souvent mal été rédigée.

Q33.–Q35. Questions souvent bien traitées.

Q36. Question difficile. Montrer que la fonction $|f|$ est constante est largement abordable grâce aux questions précédentes. La déduction que f est elle-même constante est sans doute le point le plus difficile du sujet (et nécessite d'exploiter le fait que f est développable en série entière). Seules 10 copies contenaient une argumentation satisfaisante.

Q37. Cette question est une preuve classique du théorème de d'Alembert-Gauss. La preuve est hors programme mais abordable grâce aux questions précédentes. La question a été traitée par environ 80 copies.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Q38. et **Q41.** Questions purement calculatoires. Bien faites par les candidats ayant repéré ces questions !

Q44. La dernière question a été traitée dans une dizaine de copies.

Conclusion

Bien qu'une épreuve de concours ait pour but de sélectionner les meilleurs candidats, ces derniers doivent avoir une réflexion quant à la différence de nature entre une épreuve écrite et une épreuve orale.

Lors d'une épreuve orale, on peut parfaitement affirmer qu'une fonction réelle f définie sur une partie fermée et bornée atteint sa borne supérieure. Si nécessaire, l'examinateur pourra demander des précisions sur une hypothèse de continuité sur f ou sur la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent du domaine de f.

Lors d'une épreuve écrite, il est impossible au correcteur d'interroger le candidat. Il est donc important que les candidats écrivent sur leurs copies les arguments qui leur semblent indispensables. Le jury constate malheureusement que de nombreux candidats de très bon niveau ne détaillent pas leur argumentation. Cela expliquera sans doute la déception de bon nombre de candidats ayant traité beaucoup de questions du sujet.

Dans une course effrénée à la quantité, bon nombre de candidats fournissent des réponses quasiment illisibles. Certaines réponses ne contenaient aucun mot (tout juste quelques équations et symboles $\Rightarrow$). D'autres réponses ne contenaient que des paraphrases des énoncés. Le jury déplore notamment l'horrible expression « par théorème » devenue courante dans les copies : le jury n'a pas forcément compris à quel théorème les copies faisaient référence... Le jury a été interpellé par une copie de 24 pages ayant abordé la quasi-totalité des questions avec des réponses fausses et hors-sujet.

Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire d'aborder toutes les questions pour avoir une très bonne note. De fait, la plupart des parties contiennent des questions difficiles qui peuvent hautement valoriser les copies. De plus, le sujet est préparé de sorte que ces questions difficiles deviennent accessibles pour les candidats ayant traité les questions précédentes. Enfin, le jury a beaucoup apprécié les copies qui ont avancé de façon presque linéaire dans le sujet pour se l'approprier et a même été impressionné par des copies ayant abordé une très grande part du sujet.