Mathématiques 1

Présentation du sujet

Ce sujet étudie sous plusieurs angles l'équation de diffusion (1) : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ où f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. La partie I étudie quelques propriétés de la transformation de Fourier d'une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II établit l'existence et l'unicité d'une solution de (1) lorsqu'on impose certaines conditions à la fonction f. La partie III étudie la stabilité du schéma numérique associé à (1) correspondant à la discrétisation de t et de x. La partie IV donne une interprétation probabiliste du paramètre qui détermine la stabilité étudiée à la partie III.

Le sujet aborde, autour de la problématique de l'équation de diffusion, de nombreux points du programme. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, études de fonctions, calculs de dérivées, équations différentielles, développements limités, raisonnements par récurrence, lois de probabilité usuelles pour le programme de PCSI ; intégrabilité, changements de variables, intégrales à paramètres, convergence dominée, séries entières, séries de fonctions, fonctions de plusieurs variables, diagonalisation pour le programme de PC. Les difficultés sont graduelles et bien aplanies mais de nombreuses questions sont rédigées de telle sorte que le candidat soit amené à construire seul le raisonnement et l'argumentation. Une grande partie du problème est consacrée à la transformation de Fourier et aux raisonnements spécifiques de l'intégration faisant appel aux dominations.

Analyse globale des résultats

La problématique du sujet est au cœur des préoccupations de la classe de PC et l'approche par différents thèmes (transformée de Fourier, discrétisation, marche aléatoire) devait permettre aux candidats de réinvestir les résultats du cours et de construire des raisonnements. Le premier constat concerne une accentuation de l'hétérogénéité des niveaux, et un fort étalement des notes. On trouve de nombreuses très bonnes copies de candidats qui ont bien compris ce que l'on attend d'eux, à savoir une argumentation serrée, une mise en œuvre des schémas de raisonnements standards, une rédaction soignée, et surtout qui ont bien compris les notions sous-jacentes. À l'opposé on trouve un trop grand nombre de candidats de très faible niveau avec de très grosses lacunes et un manque de savoir-faire sur les techniques fondamentales des mathématiques. Pour ces candidats le travail fourni dans la discipline est très insuffisant.

La notion d'intégrabilité est mal comprise par au moins un quart des candidats, ce qui sur ce sujet est souvent rédhibitoire. Par ailleurs, bien que les hypothèses des grands théorèmes d'intégration soient connues, leur mise en place est souvent hasardeuse. Comprendre ce que signifie le mot « intégrable », utiliser les grands théorèmes — convergence dominée, dérivation sous le signe intégrale, intégration terme à terme — cela constitue l'un des objectifs fondamentaux du programme de PC et à ce titre ce sujet constitue un recueil de ces savoir-faire. Notons également, mais ce n'est pas nouveau, que la gestion des nombres complexes pose de gros problèmes, notamment la notion de module. Concernant les compétences en calcul, encore une fois les niveaux sont hétérogènes, mais l'impression générale qui se dégage est plutôt satisfaisante.

Dans ce sujet il fallait plusieurs fois vérifier un résultat donné dans le texte : il faut mettre en garde les candidats sur le fait que dans ce cas, une réponse non argumentée, voire mensongère, entraine évidemment une pénalisation qui peut être effective, ou se traduire par un doute systématique sur la suite de la copie. Concernant la capacité à rédiger une solution rigoureuse, on constate que de nombreux candidats ont bien compris qu'il fallait argumenter sérieusement, mais il s'agit bien entendu d'utiliser des arguments convaincants, et à cet égard certaines questions sont révélatrices du niveau de rigueur des candidats. Ainsi, les candidats trop pressés d'avancer finissent par le payer assez cher en perdant un point ou deux sur chaque question souvent pour des arguments qu'ils connaissent mais oublient de citer, et tout cela cumulé peut faire un quart de la note finale. De plus, des points de bonus ont été accordés aux candidats faisant preuve de soin et de rigueur dans la rédaction des questions délicates.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Préliminaires

Q1. Cette question a donné lieu à des réponses surprenantes concernant la notion d'intégrabilité. On rencontre plus souvent que les années précédentes des erreurs graves : si la fonction converge vers 0 en $+\infty$, ou y admet une limite finie, alors l'intégrale est « faussement impropre en $+\infty$ » ; une fonction bornée comme par exemple $x \mapsto \exp(\mathrm{i}x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.... La continuité de la fonction g_σ est souvent omise ou seulement citée sur l'intervalle $[-1, 1]$; la comparaison à la fonction $x \mapsto 1/x^2$ nécessite d'indiquer que cette fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ (et non sur $\mathbb{R}$ comme on le voit parfois). Attention la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ ne fait pas partie des fonctions intégrables de référence du programme et être « du type $\exp(-x^n)$ » n'est évidemment pas un argument recevable !

Q2. L'oubli de justification de l'éligibilité pour le changement de variable dans l'intégrale généralisée est pénalisé. Il ne faut évidemment pas se contenter de poser $u^2 = x^2/(2\sigma^2)$, ce qui à priori n'a pas de sens.

Q3. Il faut justifier que la fonction g_σ est bien de classe C^2 avant de se lancer dans les calculs.

Q4. On voit parfois qu'une fonction bornée, comme par exemple $x \mapsto \exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puis que le produit de deux fonctions intégrables est intégrable ; on voit également que $\lim_{x\to+\infty} \exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x) = 0$ (voir les remarques générales sur la mauvaise compréhension de la notion d'intégrabilité et la gestion des nombres complexes). Le fait que la fonction f soit à valeurs complexes a posé des soucis pour la domination de $f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$: beaucoup de candidats reviennent à la partie réelle et la partie imaginaire, sans doute par peur d'utiliser le module, ce qui alourdit le raisonnement.

Q5. Question plutôt bien traitée, on voit apparaitre soudainement des quantificateurs dans cette question, de la rigueur le temps d'une question : on déclare les variables et on parle de $x \mapsto f(x)$, mais le contraste est assez troublant avec ce qui précède ou l'on parle souvent de « la fonction $f(x)$ ». La notion de fonction mérite qu'on s'y attarde et que l'on prenne le temps d'en saisir le sens.

Q6. Cette question n'a été abordée que par un candidat sur deux et très peu réussie. Elle nécessitait, et c'est un des objectifs de cette épreuve, de produire un enchainement d'arguments simples en commençant par l'intégrabilité de f'. Cependant, la plupart des candidats pensent que l'existence d'une limite nulle en $+\infty$ est une condition nécessaire d'intégrabilité, ce qui clôt le débat (la confusion avec la condition nécessaire de convergence pour les séries est très fréquente). Les candidats qui ont franchi cette difficulté ont été largement récompensés.

Q7. L'utilisation d'une intégration par parties nécessite de préciser que les fonctions concernées sont de classe C^1. Certains candidats ont essayé sans succès de dériver sous le signe intégral, mais ici x n'est pas un paramètre : c'est une confusion entre $F(f')$ et $\big(F(f)\big)'$.

Q8. On retrouve les mêmes erreurs qu'à la question 1, avec parfois une primitive de $\exp(-x^2)$ égale à $-\exp(-x^2)/(2x)$. Beaucoup trop de candidats ne sont réellement pas à l'aise avec la notion d'intégrabilité : une question « évidente » qui se traite en une ligne peut donner lieu à des solutions extrêmement compliquées et confuses. Certains ont prouvé ce résultat par récurrence et ainsi obtenu la relation de la question 9, mais que de complications pour si peu !

Q9. Question plutôt bien réussie par la majorité des candidats pour ce qui concerne la relation de récurrence. Mais une fois obtenue la relation liant M_{p+1} et M_p, la formule de M_p étant donnée dans le texte, il fallait argumenter (pas nécessairement par une récurrence) et non justifier par un : « on en déduit de façon évidente que ».

Q10. Il fallait bien entendu préciser le rayon de convergence de la série entière de la fonction cosinus.

Q11. Peu de candidats ont vu que l'intégrale de la partie imaginaire était nulle. La plupart des candidats voient qu'il s'agit d'une intégration terme à terme mais rédigent très mal : on omet de signaler la convergence de la série des intégrales des modules, ou on laisse apparaitre un $(-1)^p$ dans cette série. On parle de temps en temps de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en lien avec le rayon de convergence infini de la série entière ! Encore une fois le résultat étant donné, il était assez simple en remontant les calculs à l'envers de le produire. C'est bien ici la rédaction rigoureuse de la justification de l'intégration qui était attendue.

Q12. Les candidats qui ont déterminé et retenu la valeur de μ ont pu l'exploiter à la question 20.

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

Q13. Certains candidats, peu nombreux, pensent à exploiter le résultat de la question 4 pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$. Il ne faut pas attendre du correcteur qu'il fasse lui-même les simplifications de constantes pour vérifier l'égalité car en effet les réponses non simplifiées ont été légion. Certains concluent même qu'il y a égalité alors que ce n'est pas le cas à l'issue de leurs calculs.

Q14. La domination sur l'intervalle ouvert $]0,T[$ nécessitait de choisir T en fonction de t, ce qui est peu souvent envisagé (un candidat sur 10 a soulevé ce problème).

Q15. Dans cette question utilisant la convergence dominée et la définition séquentielle de la limite, de nombreux candidats ont fourni une solution soignée, mais la majorité des copies produit un raisonnement confus où surnage parfois la convergence dominée mais sans que les objets concernés soient clairement définis. Il fallait aussi choisir T en fonction de la suite (t_n), ce que très peu de candidats ont vu.

Q16. Question abordée plus souvent que la question précédente. La démarche demandée étant proche du cours, les hypothèses du théorème de Leibniz sont souvent bien citées. Même problème pour le choix de T, avec ici une domination de $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ grâce à l'équation de diffusion.

Q17. Les candidats ayant utilisé l'équation de diffusion à la question précédente ont le plus souvent pensé à faire apparaitre la dérivée seconde spatiale, mais les justifications ne sont pas toujours très claires !

Q18. Un minimum de justifications était demandé : équation différentielle linéaire, quelle est la variable de cette fonction ? À noter que la constante $K(\xi)$ est à priori complexe.

Q19. Question facile, réussie par tous les candidats qui l'ont abordée.

Q20. Question de synthèse et de calcul, que les candidats qui avaient obtenu la valeur de μ à la question 12 ont abordé avec plus de facilité.

Q21. Rarement traitée correctement. Beaucoup de candidats ont ici déserté la partie II pour se consacrer aux parties suivantes.

Q22. Seuls 20 % des candidats abordent cette fin de la partie II, les réponses sont souvent confuses, la linéarité de la transformation de Fourier est parfois citée. Encore une fois ceux qui ont trouvé $\mu = \sigma'\sqrt{2\pi}$ ont obtenu directement $\lambda_{t,\sigma} = 1$.

Q23. Question plus facile mais peu abordée.

Q24. Résultat obtenu le plus souvent par les candidats ayant calculé la valeur de μ.

III Étude numérique

Q25. Bien traitée dans l'ensemble (ne pas oublier de préciser que f est de classe C^1). Les mauvaises réponses évoquent la dérivée $f'(t,x)$ ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x)$.

Q26. Les candidats qui n'ont pas pensé au développement de Taylor ont tenté, bien entendu sans succès, de conclure par un empilement de taux d'accroissement. Les développements de Taylor sont le plus souvent corrects bien que mal justifiés (C^2).

Q27. Question plutôt bien réussie, mais les cas particuliers aux bords sont rarement évoqués. Il y a de nombreuses tentatives de démonstration par récurrence : ces candidats concluent qu'ils ont démontré le résultat par récurrence alors qu'en pratique ce n'est pas le cas.

Q28. Question plutôt bien réussie, mais de nombreux candidats qui ont reconnu une matrice A symétrique ont omis de dire qu'elle est à coefficients réels, ils n'ont donc pas répondu à la question. Attention, la somme de deux matrices diagonalisables ne l'est pas forcément ! Surprenante erreur d'accord de l'adjectif, on évoque assez souvent le « théorème spectrale ». À noter qu'il est inutile de diagonaliser A pour prouver que $F_n = A^n F_0$.

Q29. Cette question a été considérée comme simple par la plupart des candidats qui l'ont abordée (50 %) : la matrice A est diagonalisable, donc $A^n = P^{-1}D^nP$ où D^n est la matrice diagonale des valeurs propres élevées à la puissance n, laquelle matrice D^n est bornée si et seulement si toutes les valeurs propres de A appartiennent à $[-1,1]$, et de plus A^n est bornée si et seulement si D^n l'est ; il ne reste plus qu'à multiplier par la constante F_0 pour conclure. Encore faut il expliciter la norme matricielle utilisée dans ce raisonnement, et ces conditions sont-elles réellement nécessaires et suffisantes ? Autant de points qui n'ont étés abordés que par très peu de candidats.

Q30. Raisonnement classique de majoration pour la norme sup, assez souvent bien traité. Attention, il ne suffit pas de dire que si $\theta \in [0,\pi]$, $-2 \leqslant 2\cos\theta \leqslant 2$ pour en déduire l'existence de θ vérifiant $2\cos\theta = \lambda$, c'est un point bêtement perdu.

Q31. Question facile qui aurait pu figurer avant la question 30 et l'aurait sans doute simplifiée. Elle servait de tremplin pour la question suivante.

Q32. Cette question, un classique de l'algèbre linéaire, a été abordée par 10 % des candidats avec un très faible taux de réussite. Cela s'explique par le fait qu'elle arrivait loin dans le sujet au moment ou les candidats avaient donné déjà beaucoup et se rendaient compte qu'ils partaient dans un marathon de calcul. Toutes les difficultés s'empilent ici, résolution d'une équation à solutions complexes, formules d'Euler et de Moivre, résolution d'équations trigonométriques...

Q33. et Q34 Très rarement traitées.

IV Équation de diffusion et marche aléatoire

Il n'y avait pas de réelles difficultés dans cette partie portant sur le programme de PCSI, sinon de rédaction.

Q35. La loi de Bernoulli est le plus souvent obtenue par les candidats qui traitent la question (56 %), mais on oublie assez souvent de parler de l'indépendance pour justifier la loi binomiale, que certains retrouvent par un raisonnement (celui du cours) inutile.

Q36. Comme indiqué précédemment, beaucoup de méthodes descriptives peu, voire pas du tout, convaincantes. Des candidats ont fait une récurrence sur n, correcte, mais longue à rédiger.

Q37. Conséquence immédiate des deux questions précédentes pour ceux qui ont obtenu la relation liant Z_n et S_n et la loi de S_n, certains candidats ont tout de même réussi à y répondre à l'aide d'un dénombrement sans avoir reconnu la loi binomiale.

Q38. Question facile si l'on relie Z_n et S_n, peu abordée (15 %).

Q39. Il fallait justifier que $\lfloor 1/\tau \rfloor \sim_{0^+} 1/\tau$.

Q40. Deux voies possibles pour cette question, également choisies par les candidats : l'application de la formule de Pascal avec disjonction des cas ou la formule des probabilités totales. Seules les meilleures copies y arrivent.

Q41. À peine plus d'une dizaine de candidats arrivent à répondre, de façon cohérente vis-à-vis du sujet, à cette question.

Conclusion

Ce sujet complet et dense, certainement apprécié des candidats bien préparés, est au cœur du programme de PC et proche des contenus du cours. Il a mis en évidence une très forte hétérogénéité des niveaux, et de réelles difficultés liées à la notion d'intégrabilité d'une fonction et aux théorèmes puissants associés. Cependant plus d'un tiers des candidats ont produit un travail de qualité.