Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

TSI **2018**

4 heures Calculatrices autorisées

Mécanique du solide indéformable

Ce sujet aborde l'étude de quelques outils mathématiques utilisés en dynamique pour modéliser l'ensemble des caractéristiques inertielles d'un solide indéformable constitué d'un nombre fini de points matériels.

Rappels et notations

On note $\mathcal{E} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{R}_0$ le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi $\mathbb{R}^3$ est muni d'une structure d'espace euclidien orienté par la base $\mathcal{E}$.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à tous les vecteurs de F, à savoir

$$F^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \vec{y} \in F,\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0\}$$

On dit que deux plans vectoriels $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont *perpendiculaires* si et seulement si $\mathcal{P}_1^\perp \subset \mathcal{P}_0$.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est *stable par un endomorphisme* f de $\mathbb{R}^3$ si pour tout $\vec{x}$ de F, son image $f(\vec{x})$ appartient à F.

I Préliminaires

Soit $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur *non nul*. On note Δ_0 la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$ et $\mathcal{P}_0$ le plan vectoriel orthogonal à Δ_0.

I.A – Endomorphisme associé à un produit vectoriel

Q 1. Montrer que l'application $g_{\vec{u}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $g_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{u} \wedge \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ est un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$.

Q 2. Déterminer le noyau et l'image de $g_{\vec{u}}$.

Q 3. Soit λ un réel donné non nul, résoudre l'équation $g_{\vec{u}}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ d'inconnue $\vec{x}$.

Q 4. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $g_{\vec{u}}$. L'endomorphisme $g_{\vec{u}}$ est-il diagonalisable ?

Q 5. Calculer la matrice $G_{\vec{u}}$ de $g_{\vec{u}}$ dans la base $\mathcal{E}$.

Q 6. Montrer que $\mathcal{P}_0$ est stable par $g_{\vec{u}}$.

Q 7. On note $\tilde{g}_{\vec{u}}$ l'endomorphisme induit par $g_{\vec{u}}$ sur $\mathcal{P}_0$. Montrer que l'endomorphisme $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\tilde{g}_{\vec{u}}$ est une isométrie vectorielle du plan $\mathcal{P}_0$ dont on donnera les caractéristiques géométriques. On pourra orienter le plan $\mathcal{P}_0$ par le choix d'une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ telle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Q 8. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P}_0 \oplus \Delta_0$ et donner la matrice de $g_{\vec{u}}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$.

I.B – Cas particulier d'opérateur d'inertie pour un solide ponctuel

On définit la matrice $F_{\vec{u}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $F_{\vec{u}} = -(G_{\vec{u}})^2$. Soit $f_{\vec{u}}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $F_{\vec{u}}$.

Q 9. En examinant la matrice $F_{\vec{u}}$, justifier sans calcul qu'il existe une base orthonormée constituée de vecteurs propres de $f_{\vec{u}}$.

Q 10. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on a la relation : $f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \|\vec{u}\|^2 \vec{x} - \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle\, \vec{u}$.

Q 11. En déduire que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \|\vec{u}\|^2 \mathrm{P}_{\mathcal{P}_0}(\vec{x})$, où $\mathrm{P}_{\mathcal{P}_0}$ est la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}_0$.

Q 12. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f_{\vec{u}}$.

I.C – Distance d'un point à un axe

Dans cette sous-partie I.C, on suppose que $\|\vec{u}\| = 1$; on rappelle que $\Delta_0 = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

On considère l'application $q_{\vec{u}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q_{\vec{u}}(\vec{x}) = \langle f_{\vec{u}}(\vec{x}), \vec{x}\rangle$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Q 13. Démontrer que, pour tout $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$, $q_{\vec{u}}(\vec{x}) \geqslant 0$ puis déterminer les vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $q_{\vec{u}}(\vec{x}) = 0$.

Q 14. Montrer que pour tout point $M \in \mathbb{R}^3$, $q_{\vec{u}}(\overrightarrow{OM}) = d(M, \Delta_0)^2$.

I.D – Distance d'une surface à une droite

Dans cette sous-partie I.D, on suppose que $\vec{u} = \vec{k}$ et on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne, dans le repère $\mathcal{R}_0$, $4(y-2)^2 + z^2 = 4$.

Q 15. Si $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$, montrer que tous les points $M(x,\theta)$ de coordonnées $(x, 2+\cos\theta, 2\sin\theta)$ dans le repère $\mathcal{R}_0$ appartiennent à $\mathcal{S}$. Réciproquement, vérifier que, si un point appartient à $\mathcal{S}$, alors ses coordonnées dans $\mathcal{R}_0$ peuvent s'écrire sous cette forme.

On pose $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,\theta) = q_{\vec{u}}\left(\overrightarrow{OM}(x,\theta)\right)$.

Q 16. Montrer que la fonction h est minorée sur $\mathbb{R}^2$.

Q 17. Montrer qu'il existe un unique point $M_0 \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $M \in \mathcal{S}$, $q_{\vec{u}}(M) \geqslant q_{\vec{u}}(M_0)$. Déterminer les coordonnées de M_0 dans $\mathcal{R}_0$.

Q 18. Montrer que le point M_0 est un point régulier de la surface $\mathcal{S}$ et donner l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en M_0. Démontrer que $\mathcal{S}$ est contenu dans la portion d'espace définie par $\{1 \leqslant y \leqslant 3\}$.

II Droites et plans stables par un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

II.A – Une remarque sur le polynôme caractéristique

Q 19. En s'appuyant sur le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer qu'un polynôme de degré 3 à coefficients réels admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

II.B – Cas d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans cette sous-partie II.B, f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q 20. Montrer que f admet au moins une valeur propre réelle.

Q 21. Démontrer qu'une droite vectorielle est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f. En déduire que f admet au moins une droite stable.

Q 22. Démontrer que l'intersection de deux plans vectoriels distincts, stables par f, est une droite engendrée par un vecteur propre de f.

II.C – Cas d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$

Dans cette sous-partie II.C, f désigne une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Q 23. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f.

Q 24. Démontrer que si $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel stable par f, alors la droite vectorielle orthogonale à $\mathcal{P}$ est engendrée par un vecteur propre de f.

Q 25. Donner la liste des sous-espaces propres de f dans les cas suivants :

i. f est une réflexion par rapport à un plan vectoriel $\mathcal{P}_0$;

ii. f est une rotation d'axe $\Delta_0 = \mathrm{Vect}(\vec{n})$ et d'angle orienté par $\vec{n}$ valant $\theta \in \mathbb{R}$. On prendra soin de considérer à part le cas où $\theta = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

II.D – Endomorphismes qui commutent et stabilisation de sous-espaces

Q 26. On considère deux endomorphismes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Démontrer que tout sous-espace propre de f_1 est stable par f_2.

Q 27. Soient deux rotations vectorielles distinctes de l'identité. Montrer que si elles commutent, alors leurs axes sont confondus ou orthogonaux.

III Matrice d'inertie d'un solide indéformable

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère un système constitué d'objets ponctuels $\{M_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ placés dans $\mathbb{R}^3$ et munis de masses respectives $\{m_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ toutes strictement positives. Ces objets sont reliés entre eux par des tiges rigides de masses négligeables.

Le système mécanique $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ modélise un solide indéformable discret.

III.A – Définitions

On considère un système mécanique $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Soit Q un point de $\mathbb{R}^3$. On appelle *opérateur d'inertie* de $\mathcal{S}$ au point Q l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{QM_i} \wedge \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{QM_i}\right)$$

On appelle *centre d'inertie* de $\mathcal{S}$, noté $G_\mathcal{S}$, l'unique point de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \overrightarrow{OG_\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}$.

Si Δ est une droite affine, on appelle *moment d'inertie* de $\mathcal{S}$ par rapport à Δ le réel $I_\Delta(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} m_i d(M_i, \Delta)^2$.

On appelle *moment principal d'inertie* de $\mathcal{S}$, toute valeur propre de l'opérateur $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$ et *droite principale d'inertie* de $\mathcal{S}$, toute droite vectorielle engendrée par un vecteur propre de $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$.

III.B – Un exemple de système mécanique

On se place dans le repère $\mathcal{R}_0$. On prend $M_1 = (0,0,0)$, $M_2 = (1,0,0)$, $M_3 = (0,1,0)$, $M_4 = (0,0,1)$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $m_4 = 2$.

Q 28. Représenter le système $\mathcal{S} = \{(M_1, m_1), (M_2, m_2), (M_3, m_3), (M_4, m_4)\}$ à l'aide d'un schéma.

Q 29. Calculer le centre d'inertie de $\mathcal{S}$ et le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{v} = \sqrt{3}/3\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right)$.

III.C – Cas général : matrice d'inertie d'un système mécanique

Considérons un système mécanique $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et Q un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Q 30. Montrer que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i f_{\overrightarrow{QM_i}}(\vec{x})$.

Q 31. Soit Δ une droite affine passant par le point $Q \in \mathbb{R}^3$ et dirigée par le vecteur $\vec{v} \neq 0$. Montrer que

$$I_\Delta(\mathcal{S}) = \frac{\left\langle \overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}(\vec{v}), \vec{v} \right\rangle}{\|\vec{v}\|^2}$$

Q 32. Montrer que la matrice de $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est symétrique et réelle, puis exprimer ses termes diagonaux en termes de moments d'inertie par rapport à des axes à préciser.

Q 33. Montrer que $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}$ admet exactement trois droites stables si et seulement si ses trois valeurs propres sont distinctes.

IV Symétries mécaniques et directions principales d'inertie

IV.A – Définitions

Soit un système mécanique désigné par $\mathcal{S} = \{(M_i, m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dont le centre d'inertie est noté $G_\mathcal{S}$.

Dans toute la suite du problème, on effectue un changement d'origine et on se place dans le repère $\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}(G_\mathcal{S}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'origine $G_\mathcal{S}$.

On appelle *symétrie mécanique* de $\mathcal{S}$, toute isométrie vectorielle ϕ de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ vérifiant, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\phi(\overrightarrow{G_\mathcal{S} M_i}) = \overrightarrow{G_\mathcal{S} M_{\sigma(i)}}$ et $m_{\sigma(i)} = m_i$.

Ceci signifie que, par l'isométrie vectorielle ϕ, chaque point de $\mathcal{S}$ est transformé en un point appartenant également à $\mathcal{S}$ et ayant la même masse que lui.

IV.B – Mise en évidence d'une symétrie mécanique sur le système du III.B

Soit Ψ la réflexion dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q 34. Montrer que Ψ est une symétrie mécanique du système décrit au III.B.

IV.C – Cas général : recherche des moments principaux et des directions principales en utilisant les symétries mécaniques du système

Q 35. Montrer que si ϕ est une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$ alors, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\left(\phi \circ \overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}\right)(\vec{x}) = \left(\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}} \circ \phi\right)(\vec{x})$$

Q 36. En déduire que, si ϕ est une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$, alors tout sous-espace propre de ϕ est stable par l'opérateur $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$.

On dit qu'un plan vectoriel P est un *plan de symétrie* de $\mathcal{S}$ si la réflexion vectorielle par rapport à P est une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$.

Q 37. Montrer que tout plan de symétrie de $\mathcal{S}$ est stable par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$ et que toute droite vectorielle orthogonale à un plan de symétrie de $\mathcal{S}$ est une droite principale d'inertie de $\mathcal{S}$.

Q 38. On suppose que $\mathcal{S}$ possède deux plans de symétrie P_1 et P_2 qui sont perpendiculaires. Identifier un repère orthonormé dont les axes sont des droites principales d'inertie.

Q 39. On suppose que $\mathcal{S}$ présente deux plans de symétrie non perpendiculaires. Montrer qu'au moins deux moments principaux d'inertie de $\mathcal{S}$ sont égaux. On pourra utiliser le résultat de la question 33.

V Recherche du maximum d'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans la suite, on identifie $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On suppose que le système mécanique $\mathcal{S}$ peut être mis en rotation autour d'un axe fixe noté $\mathcal{D}$ passant par son centre d'inertie $G_\mathcal{S}$ et dirigé par un vecteur *unitaire* $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Cette révolution autour de $\mathcal{D}$ est faite à la vitesse angulaire constante notée $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$.

À chaque instant, on pose $\overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}(t) = R_{\omega t}\left(\overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}\right)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, où $R_{\omega t}$ désigne la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ dirigé par $\vec{n}$ et d'angle ωt. On admet que si les colonnes de $R_{\omega t}$ sont désignées par $(U(t), V(t), W(t))$, on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{\omega t} = \omega(\vec{n} \wedge U(t), \vec{n} \wedge V(t), \vec{n} \wedge W(t))$.

Définition. Soit un système mécanique $\mathcal{S}_t = \{(M_i(t), m_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dont le centre d'inertie est noté $G_\mathcal{S}$. On appelle *énergie cinétique propre* de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}$ $(G_\mathcal{S}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le réel

$$E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}(t)\right\|^2\right)$$

Q 40. Montrer que $E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \dfrac{1}{2}\omega^2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \left\|\vec{n} \wedge \overrightarrow{G_\mathcal{S}M_i}(t)\right\|^2\right)$ puis que $E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \dfrac{1}{2}\omega^2\langle\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}(\vec{n}), \vec{n}\rangle$.

On suppose que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$ et on désigne par Δ_i la droite affine passant par $G_\mathcal{S}$ dirigée par $\vec{e}_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Q 41. Montrer que si $\vec{n} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, alors $E_{\mathcal{R}_{G_\mathcal{S}}} = \dfrac{1}{2}\omega^2\left(\alpha^2 I_{\Delta_1}(\mathcal{S}) + \beta^2 I_{\Delta_2}(\mathcal{S}) + \gamma^2 I_{\Delta_3}(\mathcal{S})\right)$.

Q 42. Dans quelles situations l'énergie cinétique est-elle maximale pour une vitesse angulaire ω donnée ?

• • • FIN • • •