Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet aborde quelques bases mathématiques nécessaires pour la mécanique des systèmes indéformables, dans le cas d'un système discret. Il s'appuie sur les propriétés du produit vectoriel, du produit scalaire et l'étude de la stabilité d'une droite ou d'un plan par un endomorphisme de l'espace. Cette épreuve utilise des notions d'algèbre linéaire et de géométrie conformes au programme des deux années de la filière TSI.

La première partie décrit l'endomorphisme $\vec{x} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{x}$ associé au produit vectoriel. Il s'agit de caractériser un opérateur d'inertie et de démontrer des expressions pour la distance d'un point à un axe et d'une surface à une droite.

La deuxième partie traite de la stabilité d'un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ par un endomorphisme.

Les éléments d'inertie d'un solide indéformable discret sont définis et caractérisés dans la troisième partie.

Dans la quatrième, on recherche des moments principaux et des directions principales d'inertie d'un système mécanique à l'aide de symétries.

Enfin la dernière partie décrit l'optimisation de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Analyse globale des résultats

Cette épreuve progressive et intéressante, apparait trop abstraite pour une majorité de candidats maitrisant peu les propriétés du produit vectoriel et le cours d'algèbre linéaire. Cependant certains ont bien lu et analysé tout le sujet et le choix des questions traitées s'est avéré payant.

Le jury rencontre trop souvent des copies incompréhensibles, peu soignées ou voulant faire illusion. Il est vivement déconseillé d'utiliser les locutions « évident », « trivial », « il est clair que ». Si un résultat est évident, il suffit de donner les arguments qui le montrent, sans commentaire.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury a été surpris du nombre important de candidats connaissant mal le produit vectoriel. En particulier, ses propriétés géométriques permettaient de répondre rapidement à certaines questions de la première partie. Son expression analytique est parfois erronée. La formule donnant la distance d'un point à une droite dans l'espace usuel, est rarement bien énoncée, souvent confondue avec une expression de la distance point-droite dans le plan usuel.

Les réponses à des questions géométriques devraient davantage être accompagnées d'un dessin, même lorsque celui-ci n'est pas explicitement demandé. La géométrie repérée apparaissant dans les trois dernières parties est mal maitrisée et entraine trop d'incohérence. Par exemple en **Q40.**, le vecteur $\overrightarrow{G_{\mathcal{S}}M_i}(t)$ a été transcrit en $\overrightarrow{G\mathcal{S}M_i}(t)$ ou $\overrightarrow{G_{\mathcal{S}M_i(t)}}$. Les notations d'un énoncé doivent être comprises et correctement retranscrites.

Il faut répondre à tous les points d'une question. En **Q1.**, on demande trois points : « endo », « morphisme », « non nul ». De nombreux candidats ne traitent qu'un seul point.

Quand un noyau ou une image est à déterminer, penser au théorème du rang. Le noyau et l'image d'un endomorphisme ne sont en général pas supplémentaires (cf. **Q8.**).

Q7. La notion d'endomorphisme induit n'est pas explicitement au programme, mais elle découle naturellement de la définition de la stabilité d'un sous-espace. Les candidats l'ont compris mais trop peu ont pensé à construire la matrice de $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\tilde{g}_{\vec{u}}$ dans une base orthonormée de $\mathcal{P}_0$.

Plusieurs éléments de réponse laissent entrevoir que le cours n'est pas maitrisé. Par exemple l'assertion « f admet au plus trois vecteurs propres » est grossièrement fausse. Soit il n'existe pas de vecteurs propres, soit il en existe une infinité. L'énoncé du théorème spectral matriciel est trop souvent approximatif. On lit par exemple « Les vecteurs propres forment une base orthonormée », alors qu'on attend « Si la matrice canoniquement associée à un endomorphisme f est symétrique à coefficients réels, il existe une base orthonormée constituée de vecteurs propres de f ».

Q10. L'expression de $f_{\vec{u}}$ à démontrer est très utile pour la suite du problème. Cette question a été largement traitée, souvent avec la formule du double produit vectoriel. Bien qu'elle ne soit pas explicitement au programme de mathématiques, le jury n'a pas sanctionné l'application de cette formule présente dans d'autres disciplines. Rappelons que le carré $f_{\vec{u}}^2$ de l'endomorphisme $f_{\vec{u}}$ est le composé $f_{\vec{u}} \circ f_{\vec{u}}$ et n'a donc aucun lien avec une éventuelle multiplication.

Q18. Cette question relativement facile a été très mal traitée. La définition d'un point régulier d'une surface n'est pas assez connue et souvent confondue avec celle d'un point critique d'une fonction. Aurait été bienvenu : un schéma représentant une surface $S : f(x, y, z) = 0$ (une sphère par exemple), un point $M_0 \in S$, le plan tangent à S en M_0 et le gradient de f en M_0 orthogonal à ce plan.

Q19. Plusieurs candidats confondent le théorème des valeurs intermédiaires avec le théorème de la bijection. Une fonction polynomiale de degré 3 n'est pas monotone en général. De plus le théorème des valeurs intermédiaires ne suppose aucune propriété de monotonie. Le résultat repose sur la continuité, hypothèse trop souvent omise. L'énoncé demande explicitement d'utiliser ce théorème, il faut suivre cette indication plutôt que tenter une preuve à partir d'un argument algébrique.

Q23. Cette question de cours a été mal traitée, le caractère bijectif d'une isométrie non évoqué. La notion de plans perpendiculaires définie dans le préambule ne devait pas être confondue avec la notion d'orthogonalité vue en cours. Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont orthogonaux, mais cela n'a pas de sens de dire qu'ils sont perpendiculaires.

Q34. La matrice est symétrique, il s'agit de montrer qu'elle est également orthogonale, pour justifier qu'elle est la matrice d'une symétrie. Trop de candidats se sont laissés induire en erreur par la terminologie de symétrie mécanique.

Q36. Un soin particulier de rédaction est attendu, pour récapituler l'ensemble des arguments permettant de répondre à cette question de synthèse.

Q41. L'hypothèse selon laquelle la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ diagonalise l'opérateur $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G_\mathcal{S}}}}$ n'est pratiquement jamais utilisée alors qu'elle est au cœur du calcul qui permet de répondre à la question. Il est attendu des candidats une bien plus grande concentration dans la lecture du sujet.

Beaucoup de copies faibles font l'impasse sur la plus grande partie du sujet avant de tenter les dernières questions **Q40.**, **Q41.**, **Q42.**. Celles-ci plus techniques ne sont véritablement abordables qu'à condition d'avoir un minimum compris ce qui précède. Il est inutile de tenter de faire illusion sur des questions plus difficiles quand celles plus faciles ont posé problème.

Conclusion

Un grand nombre de candidats ont survolé beaucoup de questions, sans consacrer le temps nécessaire pour les traiter correctement. Ils devraient se concentrer sur les questions les plus faciles ou les plus classiques en les traitant rigoureusement pour parvenir au résultat attendu.

Nous conseillons de ne pas faire d'impasse sur le programme. Un travail régulier est nécessaire. Rappelons qu'apprendre et comprendre le cours sont nécessaires au départ. Il faut aussi apprendre à l'appliquer en s'entrainant sur des exercices de niveau de difficulté progressif.