Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve aborde certaines propriétés des nombres de Fibonacci. L'objectif est d'amener des applications en probabilités et en informatique avec programmation d'un résultat d'arithmétique. Ce sujet s'appuie sur les propriétés d'une suite récurrente, du développement en série entière et en série de Fourier.

Ce problème fait appel à des notions d'analyse, de probabilité et de programmation conformes au programme des deux années de la filière TSI.

La première partie décrit le comportement de la suite de Fibonacci. Elle se termine par l'expression du terme général de cette suite.

La deuxième partie s'intéresse aux séries génératrices de Fibonacci. On y détermine leur rayon de convergence et leur somme. Des développements en séries entières permettent de démontrer une relation entre les nombres de Fibonacci.

À l'aide d'un développement de Fourier, la troisième partie amène une expression intégrale d'un nombre de Fibonacci.

Dans la quatrième, ces nombres apparaissent dans la loi du temps d'attente de la séquence pile-pile dans un jeu de pile ou face infini.

Enfin le but de la dernière partie est de démontrer que tout entier naturel non nul peut être représenté de manière unique comme la somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs. En découle un codage binaire des nombres naturels. Ce codage et son décodage sont implantés en langage Python.

Analyse globale des résultats

Le sujet couvre une grande partie du programme, de sorte qu'un candidat en difficulté sur une partie peut rebondir sur une autre. Certains d'entre eux ont su proposer des solutions très pertinentes aux questions d'algorithmique. Le problème propose des questions de difficulté très variée, de la plus élémentaire (**Q1**) à la plus difficile (**Q32**), permettant ainsi une évaluation fine des candidats.

Le niveau général est cependant décevant pour un sujet ne présentant pas de difficultés majeures et faisant appel à de nombreuses méthodes très classiques. Les meilleures notes sont obtenues par les candidats ayant traité une grande partie du problème avec soin, rigueur et des justifications.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Remarques générales

Il est fondamental de faire apparaitre au correcteur de manière lisible, claire et concise les étapes qui mènent au résultat. Plusieurs réponses laissent paraitre que le cours n'est pas maitrisé. Rappeler précisément les résultats de cours qui permettent de répondre à une question est au contraire très apprécié.

Trop de copies sont incompréhensibles, peu soignées ou voulant faire illusion. Il est vivement déconseillé d'utiliser les locutions « évident », « trivial », « il est clair que ». Si un résultat est évident, il suffit de donner les arguments qui le montrent, sans commentaire. Il n'est pas recommandé de rendre son brouillon. Recopier l'énoncé est inutile. Les questions doivent être numérotées précisément.

Le candidat doit se poser la question de la technique adaptée à la question posée. Le raisonnement par récurrence n'a par exemple aucun sens pour résoudre la question **Q9**, il n'est pas non plus adapté à la question **Q22**.

L'enchainement des questions et la logique du raisonnement d'ensemble proposé par un groupe de questions doivent être compris. Par exemple, certains candidats ont traité les questions **Q9–Q11** dans le désordre en utilisant les développements en série entière demandés en **Q11** pour résoudre **Q9**.

Un esprit critique sur un résultat est attendu. Relever plusieurs prétendues erreurs d'énoncé ou trouver des probabilités strictement plus grandes que 1 (cf. **Q21**) montrent une absence de recul du candidat par rapport à ses conclusions.

Les programmes informatiques doivent être commentés. Cela permet de vérifier l'adéquation entre l'intention et le code effectivement écrit. Il est fortement conseillé de prendre des variables explicites. Il convient aussi de respecter les instructions relatives aux variables d'entrée et de sortie des fonctions Python que le sujet demande d'écrire ; par exemple **Q36** demande de renvoyer l'indice p et non le terme F_p.

I Prémiminaires

Q2 et **Q3**. Ces deux questions sans grande difficulté ont été très souvent mal traitées. Le jury attend des preuves rigoureuses. Une affirmation sans argument ne suffit pas. Un raisonnement par récurrence permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$, la croissance de (F_n) en découle. Un raisonnement par l'absurde, par exemple, prouve la divergence de (F_n).

Q4 et **Q5**. Vérifier que les deux nombres donnés dans l'énoncé, sont solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ ne suffit pas. Il faut justifier qu'il n'y en a pas d'autres. En **Q5**, on attend un calcul littéral. L'usage de la calculatrice n'apporte aucun point.

Q6. La connaissance du cours sur les suites récurrentes d'ordre 2 permettait une réponse efficace, le raisonnement par récurrence demandant davantage de calculs.

II Séries génératrices de Fibonacci

Q7. Étonnamment cette question a souvent été mal traitée. Lorsque l'équivalent est correct, la réponse a trop souvent été donnée sans aucune justification.

Q8. Plusieurs techniques permettent d'aboutir au résultat. Les candidats qui utilisent la règle de d'Alembert oublient trop souvent de préciser que le terme général F_n est non nul, sans quoi l'utilisation de cette technique est impossible. Il convient d'utiliser ce critère dans le cadre des séries numériques. Les candidats qui utilisent le résultat sur l'égalité des rayons de convergence des séries entières à termes généraux équivalents, combiné avec les résultats sur les rayons de convergence des séries géométrique et exponentielle, ont souvent bien réussi cette question.

Q12 et **Q13**. Rappelons qu'une série est une suite. Le symbole $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}$ est un nombre, désignant la limite de la suite des sommes partielles. On ne peut l'écrire qu'après avoir justifié la convergence de la série. Trop de candidats manipulent des sommes sans les indices. L'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ n'est vraie que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

Q15. La formule de Leibniz est mal maitrisée. Certains candidats confondent $f^{(n)}$ et $f^{(n)}(0)$. Enfin, l'écriture $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(n)}$ n'a pas de sens.

III Représentation intégrale de la suite de Fibonacci

Q16. Le jury attendait une démonstration complète avec relation de Chasles et changement de variable.

Q18. La plupart des candidats ne maitrisent pas la technique du changement de variable pour le calcul intégral.

Q19 et **Q20**. Les théorèmes de Dirichlet et de Parseval doivent être cités et accompagnés de la vérification de leurs hypothèses.

IV Temps d'attente de (Pile, Pile) dans un jeu de pile ou face infini

Q21 et **Q22**. Les propriétés d'indépendance et d'incompatibilité d'évènements doivent être évoquées.

Q23. L'égalité des deux évènements se prouvent par double inclusion. Une seule a été vérifiée.

Q27. Alors que le sujet demande explicitement d'utiliser **Q9**, beaucoup de candidats calculent $\mathbb{P}(Y = 0)$ à l'aide de l'égalité montrée en **Q26**, alors même que cette égalité est demandée pour n non nul.

V Décomposition d'un entier

Q32–Q34. Ces trois questions sont les plus difficiles. Certains candidats ont tenté une récurrence sur n alors que l'énoncé invitait à une récurrence sur r. Une première difficulté apparaissait dans la formalisation de l'hypothèse de récurrence, qui comprenait une quantification du type « $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}$ tels que ... ». Une seconde difficulté résidait dans la possible confusion entre $F_{k_{r+1}}$, F_{k_r+1} et $F_{k_r} + 1$.

Conclusion

La plupart des candidats ont abordé beaucoup de questions, en particulier celles en fin de problème où il est demandé d'écrire un programme en Python. Le sujet est parfaitement calibré pour le niveau de la filière. Les questions demandant de justifier une propriété donnée dans l'énoncé alternent avec les questions où le candidat doit lui-même établir un résultat. La connaissance du cours et la maitrise de techniques de raisonnement et de calcul au programme permettaient de rendre une très bonne copie. À cet égard, le sujet valorise fortement les candidats qui ont fait un effort d'apprentissage et d'assimilation du cours et des exercices classiques.