Mathématiques 2

Présentation du sujet

Les thèmes d'étude proposés dans cette épreuve permettent de balayer l'ensemble du programme d'algèbre linéaire et de calcul matriciel des deux années. Le sujet comprend deux parties indépendantes dans une large mesure. La première partie permet d'étudier le commutant d'une matrice dans des cas particuliers et dans le cas général de matrices diagonalisables. La deuxième partie propose l'étude d'un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 3 à l'aide des outils algébriques du programme.

Analyse globale des résultats

Le sujet est de longueur raisonnable. Les candidats ayant une bonne connaissance du cours et utilisant correctement les définitions rappelées dans l'énoncé pouvaient obtenir un résultat honorable.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Commentaires généraux

Compréhension du sujet

Le sujet comprend plusieurs exemples de matrices de taille 3, ce qui a aidé de nombreux candidats à l'appréhender. Il est néanmoins regrettable que de nombreux candidats se limitent aux questions calculatoires au détriment des questions plus théoriques alors même que beaucoup étaient abordables par des étudiants ayant une bonne connaissance du cours d'algèbre linéaire.

Cours

Les notions de sous-espace vectoriel, base, famille libre, famille génératrice, dimension, isomorphisme, bijectivité devraient être mieux maitrisées par les candidats.

- La donnée d'une base était demandée à de nombreuses reprises dans le sujet. Rappelons que lorsque la dimension de l'espace vectoriel est inconnue il faut *démontrer* que la famille est libre *et* génératrice. Un autre résultat utile et que l'énoncé suggérait d'utiliser à plusieurs reprises est le fait que l'image d'une base par un isomorphisme est une base.
- Dans le même ordre d'idées, pour démontrer qu'une application est un isomorphisme entre deux espaces vectoriels dont on ne connait pas les dimensions il faut démontrer sa bijectivité. On ne peut se contenter de l'injectivité lorsqu'on n'a pas encore démontré l'égalité des dimensions, ce qui était justement l'objectif de la question.
- La notion de matrice de passage est mal assimilée. La formule de changement de bases n'est pas souvent citée et ne semble pas bien connue.
- Certains candidats trouvent des espaces propres réduits au vecteur nul, ou des matrices de passage avec une colonne nulle.

Calculs

- Le calcul des déterminants et des polynômes caractéristiques est dans la plupart des cas bien réalisé. Les candidats pouvaient utiliser leur calculatrice, mais dans ce cas il faut le préciser dans sa copie et bien montrer que les définitions et formules sont connues.
- Il est indispensable de savoir mener un calcul faisant intervenir des paramètres comme coefficients d'une matrice.
- Il est inutile lorsque cela n'est pas demandé de calculer l'inverse des matrices de passage.

Raisonnement, rédaction, présentation

Beaucoup de copies ne sont qu'une succession de calculs sans aucune explication. La communication est une compétence importante pour un futur ingénieur. Un effort d'explication et de clarté est attendu par le jury. En ce qui concerne la logique, il faut clairement préciser si le raisonnement se fait par équivalence, par double ou par simple implication. Un raisonnement par équivalence ne doit pas être confondu avec une simple implication. Dans le même registre, des difficultés d'expression dans la langue française et un manque de soin ont été remarqués (et pénalisés) dans plusieurs copies.

Détails sur certaines questions

I.A - Propriétés générales

Q3. Le jury attendait une récurrence.

Q5. Il fallait prendre garde à raisonner par équivalence (ou double implication) et non par simple implication.

Q6 et **Q7**. Les espaces de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes.

Q8. Le jury attendait le rappel de la définition d'un isomorphisme. Ici les questions précédentes permettaient d'affirmer que les applications étaient des bijections réciproques.

I.B - Quelques exemples en dimension 3

Cette partie a été abordée par quasiment tous les candidats. Les calculs d'éléments propres ont permis à la plupart de gagner des points.

Q11, **Q15**, **Q22**. Les candidats ont souvent donné une réponse sans justification. La démonstration du caractère libre et générateur de la famille était attendu ou l'emploi de l'image d'une base par isomorphisme.

Q21. Il y avait une erreur dans l'énoncé où le coefficient d devait être pris égal à 0. Seule la question **Q22** utilisait le résultat de cette question dans la suite du problème.

Q22. L'erreur de la question **Q21** n'a pas pénalisé les candidats dans cette question, le jury ayant uniquement tenu compte de la démarche logique mise en œuvre.

I.C - Commutant d'une matrice d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes

Q24. On attendait un calcul détaillé en mettant en évidence le calcul des puissances d'une matrice diagonale.

Q25. Il était utile d'utiliser le noyau pour montrer l'injectivité. Le lien entre le nombre de racines d'un polynôme et son degré permettait de conclure.

Q26. Peu de candidats ont fait le lien avec la question précédente qui permettait de prouver la bijectivité et de conclure.

La fin de la partie permettait au candidat ayant suffisamment de recul de faire la synthèse des résultats précédents.

À noter que d'assez nombreux candidats ont bien traité **Q33** mais n'ont malheureusement pas conclu à l'égalité des ensembles par double inclusion.

II Suites récurrentes linéaires d'ordre 3

Q36. Une démonstration par récurrence était attendue pour la relation $U_n = G^n U_0$.

Q40. C'est en démontrant que φ est un isomorphisme qu'on pouvait conclure que la dimension de F vaut 3.

Q41. Il fallait encore utiliser l'image d'une base par isomorphisme.

Q44. Il ne fallait pas oublier de prouver que les suites étaient éléments de l'espace vectoriel et d'utiliser le calcul du déterminant défini en **Q41**.

Conclusion

Ce sujet a permis d'évaluer la maitrise de la plupart des notions d'algèbre linéaire au programme. De nombreuses questions faisant appel aux définitions et aux méthodes du cours ont permis à ceux des candidats ayant des connaissances solides du cours de se distinguer.