Mathématiques 1

MP **2022**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Exemples de contraintes symplectiques linéaires

Notations

— Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels non nuls.

— On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Ainsi, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire réel d'ordre n (matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à 1 :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

— On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.

— Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$.

— Le groupe orthogonal réel d'ordre n est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\}.$$

— Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Objectif

Ce problème a pour objectif de définir la notion d'espace symplectique réel et d'étudier certaines propriétés des endomorphismes symplectiques de $\mathbb{R}^n$.

La première partie établit quelques résultats utiles dans la suite.

La deuxième partie définit toutes les notions relatives aux objets symplectiques utilisés dans la suite du problème.

La troisième partie vise plus spécifiquement à montrer que toute matrice symplectique réelle a un déterminant égal à 1.

La quatrième partie aborde la définition des contraintes permettant d'injecter un objet dans un autre au moyen d'un endomorphisme symplectique.

Les deux dernières parties sont largement indépendantes.

I Préliminaires

Q 1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \qquad X^\top A Y = X^\top B Y.$$

Montrer que $A = B$.

Q 2. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de $M^\top M$ sont toutes strictement positives.
En déduire qu'il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^\top M$.

II Objets symplectiques

II.A – Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

On appelle *forme symplectique sur* E toute application ω de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

— bilinéarité : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\omega(x+\lambda y, z) = \omega(x,z) + \lambda\omega(y,z)$ et $\omega(x, y+\lambda z) = \omega(x,y) + \lambda\omega(x,z)$;

— antisymétrie : $\forall (x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$;

— non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E,\ \omega(x,y) = 0\} = \{0_E\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E, ω) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E.

Q 3. Montrer que, si ω est une forme symplectique sur E, alors pour tout vecteur x de E, $\omega(x, x) = 0$.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E, ω), on appelle *ω-orthogonal de F* et on note F^ω l'ensemble

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\}.$$

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E, ω).

Q 4. Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.

Q 5. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?

Pour tout $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto \omega(x, y)$ et on considère

$$d_\omega : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x, \cdot) \end{array} \right.$$

Q 6. Montrer que d_ω est un isomorphisme.

Pour $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on note $\ell|_F$ la restriction de ℓ à F.

Q 7. Montrer que l'application de restriction $r_F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F, \mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell|_F \end{array} \right.$ est surjective.

Q 8. Préciser le noyau de $r_F \circ d_\omega$. En déduire que $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.

Q 9. Montrer que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

II.B – ***Structure symplectique standard sur*** $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\Omega = \big(\omega(e_i, e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

où $(e_1, ..., e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 10. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \omega(x, y) = X^\top \Omega Y$$

où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 11. En déduire que Ω est antisymétrique et inversible.

Q 12. Conclure que l'entier n est pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n = 2m$.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})\big)$ la matrice définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

Q 13. Montrer que l'application $b_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, j(y) \rangle \end{array} \right.$ est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe donc des formes symplectiques en dimension paire, et seulement en dimension paire.

La forme symplectique b_s est appelée la *forme symplectique standard sur* $\mathbb{R}^n$.

II.C – ***Endomorphismes et matrices symplectiques réels***

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel (E, ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \omega\big(u(x), u(y)\big) = \omega(x, y).$$

On note $\mathrm{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E, ω).

Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.

Soient λ, μ des valeurs propres réelles de u, et soient $E_\lambda(u)$, $E_\mu(u)$ les sous-espaces propres associés.

Q 14. Montrer que, si $\lambda\mu \neq 1$, alors les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \qquad \omega(x, y) = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 15. Montrer que u est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $M^\top JM = J$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si $M^\top JM = J$.

On note $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top JM = J\}.$$

Q 16. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par transposition et contenant la matrice J.

Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ordre* $n = 2m$.

Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ (décomposition par blocs).

Q 17. Montrer que $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$A^\top C \text{ et } B^\top D \text{ sont symétriques} \qquad \text{et} \qquad A^\top D - C^\top B = I_m.$$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

L'objectif de cette partie est de montrer l'inclusion $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ par deux méthodes différentes qui reposent chacune sur une propriété structurelle du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ qu'on examine au préalable.

III.A – Le cas de la dimension 2

Q 18. Montrer que $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

III.B – Commutant de J

On note $\mathcal{C}_J = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid JM = MJ\}$ le commutant de la matrice J, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec J.

Q 19. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})\big)$,

$$M \in \mathcal{C}_J \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (U,V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}.$$

Q 20. En déduire que, pour toute matrice $M \in \mathcal{C}_J$, $\det(M) \geqslant 0$.

On pourra considérer le produit de matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ \mathrm{i}I_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -\mathrm{i}I_m & I_m \end{pmatrix}$.

III.C – Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

On note $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques et orthogonales réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie.

Q 21. Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Q 22. Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_J$.

Q 23. En déduire que, pour toute matrice M de $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, $\det(M) = 1$.

Jusqu'à la fin de la sous-partie III.C, on considère une matrice $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^\top M$.

Q 24. Montrer que S est symplectique.

On pourra considérer une base de vecteurs propres de l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S, et montrer que s est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Q 25. Justifier que S est inversible puis montrer que la matrice O définie par $O = MS^{-1}$ appartient au groupe $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$.

Q 26. Conclure que le déterminant de la matrice M est égal à 1.

III.D – Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques

Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $n = 2m$.

On appelle *transvection* de E tout endomorphisme τ de E tel qu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $a \in \ker(\ell)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \qquad \tau(x) = x + \ell(x)\, a.$$

III.D.1) Transvection symplectique

Q 27. Soit $a \in E$ un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que l'application τ_a^λ définie par

$$\forall x \in E, \quad \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a, x)\, a$$

est une transvection de E et qu'il s'agit d'un endomorphisme symplectique de ce même espace.

Les applications τ_a^λ pour $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelées *transvections symplectiques de E*.

Q 28. Soit $a \in E$ un vecteur non nul et soient λ et μ des réels. Montrer que $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$.

Q 29. Soient $a \in E$ un vecteur non nul et λ un réel. Montrer que $\det(\tau_a^\lambda) > 0$.

Q 30. La réciproque $(\tau_a^\lambda)^{-1}$ est-elle encore une transvection symplectique ?

On se propose de montrer le théorème suivant :

> Tout endomorphisme symplectique de E peut s'écrire comme la composée d'au plus $2n = 4m$ transvections symplectiques de E :
> si $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$, il existe un entier $p \leqslant 4m$ et τ_1, τ_2, ..., τ_p des transvections symplectiques de E telles que $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

III.D.2) Un lemme

On commence par montrer le lemme suivant :

> Pour tous vecteurs non nuls x et y de E, il existe une composée γ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\gamma(x) = y$.

On fixe x et y, non nuls, dans E.

Q 31. Supposons que $\omega(x, y) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

Q 32. Supposons que $\omega(x, y) = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $z \in E$ tel que $\omega(x, z) \neq 0$ et $\omega(y, z) \neq 0$.

Q 33. Montrer le lemme cité ci-dessus.

III.D.3) Le théorème

Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.

Soit $e_1 \in E$ un vecteur non nul.

Q 34. Justifier l'existence de $f_1 \in E$, non colinéaire à e_1, tel que $\omega(e_1, f_1) = 1$.

On pose $P = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et f_1. On va montrer l'existence d'une composée δ d'au plus quatre transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta\big(u(e_1)\big) = e_1 \\ \delta\big(u(f_1)\big) = f_1 \end{cases} \tag{III.1}$$

Q 35. Pourquoi existe-t-il une composée δ_1 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\delta_1\big(u(e_1)\big) = e_1$?

Q 36. Notons $\tilde{f}_1$ le vecteur $\delta_1\big(u(f_1)\big)$. Montrer qu'il existe une composée δ_2 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta_2(e_1) = e_1 \\ \delta_2(\tilde{f}_1) = f_1 \end{cases}$$

On pourra adapter la démonstration du lemme précédent.

La composée $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ d'au plus quatre transvections symplectiques vérifie bien les conditions (III.1) souhaitées.

On pose $v = \delta \circ u$.

Q 37. Montrer que P est stable par v et déterminer v_P, endomorphisme induit par v sur P.

Q 38. Montrer que P^ω est stable par v.

Q 39. Montrer que la restriction ω_{P^ω} de ω à $P^\omega \times P^\omega$ munit P^ω d'une structure d'espace symplectique et que l'endomorphisme v_{P^ω} induit par v sur P^ω est un endomorphisme symplectique.

Q 40. À l'aide de ce qui précède, montrer le théorème annoncé.

III.D.4) Une conséquence topologique

On munit toujours l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé.

Q 41. Montrer que le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de cet espace.

III.D.5) Deuxième conséquence

Q 42. Utiliser les résultats de cette sous-partie III.D pour prouver l'inclusion $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

IV Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

Dans cette partie, on fixe $n = 2m \geqslant 4$.

On rappelle que $\mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ désigne le groupe des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2m}, b_s)$. On note de plus $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ le groupe des endomorphismes de $\mathbb{R}^{2m}$ de déterminant égal à 1.

Pour $r \geqslant 0$, on considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^{2m}$.

— La boule euclidienne fermée de rayon r :

$$B^{2m}(r) = \left\{(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad x_1^2 + \cdots + x_m^2 + y_1^2 + \cdots + y_m^2 \leqslant r^2\right\}.$$

— Le cylindre symplectique de rayon r basé sur les axes de coordonnées numéro 1 et $m+1$:

$$Z^{2m}(r) = \left\{(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad x_1^2 + y_1^2 \leqslant r^2\right\}.$$

Sur des exemples (boules ou cylindres) de parties A et B de $\mathbb{R}^{2m}$, on étudie l'existence d'un endomorphisme u tel que $u(A) \subset B$ lorsque $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$, puis lorsque $u \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$.

IV.A – Injection par $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ *d'une boule dans un cylindre*

Q 43. Montrer que, pour tout $r > 0$, il existe $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $u\big(B^{2m}(1)\big) \subset Z^{2m}(r)$.

IV.B – Injection par $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ *d'une boule dans une autre*

Soit $r > 0$ tel qu'il existe $u \in \mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ vérifiant $u\big(B^{2m}(1)\big) \subset B^{2m}(r)$.

Notons $U \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de la matrice U.

Q 44. Montrer que $|\lambda| \leqslant r$.

Pour le cas λ non réel, si P et Q dans $\mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$ sont telles que $Z = P + \mathrm{i}Q$ est une colonne propre de U pour la valeur propre λ, on pourra montrer que $\|UP\|^2 + \|UQ\|^2 = |\lambda|^2(\|P\|^2 + \|Q\|^2)$.

Q 45. En déduire que $1 \leqslant r$.

Q 46. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $r > 0$ existe-t-il u appartenant à $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $u\big(B^{2m}(1)\big) \subset B^{2m}(r)$?

IV.C – Injection symplectique d'une boule dans un cylindre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe un endomorphisme symplectique $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ vérifiant $\psi\big(B^{2m}(1)\big) \subset Z^{2m}(r)$.

On note $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de ψ dans la base canonique $(e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_m)$ de $\mathbb{R}^{2m}$ et $\psi^\top$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M^\top$.

Q 47. Montrer que $|b_s\big(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\big)| = 1$ puis que $\|\psi^\top(e_1)\| \geqslant 1$ ou $\|\psi^\top(f_1)\| \geqslant 1$.

Q 48. Montrer que $1 \leqslant r$.

Q 49. Montrer le théorème de non-tassement linéaire :

> Pour $R > 0$ et $R' > 0$, il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $\psi\big(B^{2m}(R)\big) \subset Z^{2m}(R')$ si et seulement si $R \leqslant R'$.

• • • FIN • • •