CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2022

4 heures — Calculatrice autorisée

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On utilisera les notations matricielles classiques :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à n lignes ;
- 0_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls ;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques ;
- $\operatorname{diag}(a_1, ..., a_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, ..., a_n$ dans cet ordre ;
- $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A ;
- $\operatorname{sp}(A)$ désigne le spectre réel de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont assimilés à des réels.

Avec ces notations, le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(U \mid V) = U^\top V$.

On note $\|U\|$ la norme euclidienne canonique de $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $p \in]0,1[$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes définies sur Ω.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, on note $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$ et $\operatorname{cov}(X, Y)$ respectivement l'espérance de X, la variance de X et la covariance de X et Y, lorsqu'elles sont définies.

On rappelle la formule

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Définition

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthodiagonalisable* s'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$.

Orthodiagonaliser A revient à déterminer un couple de telles matrices (D, P).

I Généralités sur les matrices symétriques réelles

Q 1. Démontrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

I.A – *Un exemple dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 2. En observant la première et la dernière colonne de A_1, déterminer un vecteur propre de A_1 et la valeur propre λ_1 associée.

Q 3. Déterminer le sous-espace propre de A_1 associé à la valeur propre λ_1 et en déduire le spectre de A_1.

Q 4. Orthodiagonaliser A_1.

I.B – *Un exemple dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q 5. Montrer que l'application $\phi : (P, Q) \mapsto \phi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 6. Écrire la matrice H de ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire la matrice de terme général $h_{i,j} = \phi(X^i, X^j)$ où les indices i et j varient entre 0 et $n-1$.

Q 7. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer le produit $U^\top H U$ à l'aide de ϕ et des coefficients de U.

Q 8. Montrer que H appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont strictement positives.

I.C – *Rayon spectral*

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de spectre non vide, le *rayon spectral* de A, noté $\rho(A)$, est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|.$$

Q 9. Montrer que, si A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0_n$, alors le rayon spectral de A est nul.

Q 10. On note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$. Démontrer que C est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 11. En déduire que l'application : $U \mapsto |U^\top AU|$ admet un maximum sur C.

Q 12. Montrer que $\rho(A) \leqslant \max\limits_{U \in C} |U^\top AU|$.

I.D – *Rayon spectral d'une matrice symétrique*

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q 13. Démontrer que $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} |U^\top AU|$.

On suppose de plus que les valeurs propres de A sont toutes positives.

Q 14. Montrer alors que $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} (U^\top AU)$.

Q 15. Démontrer que l'application ρ définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

II Matrice de covariance

Dans la suite du problème, on considère n variables aléatoires discrètes $Y_1, ..., Y_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles et on définit la fonction Y de Ω dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix}.$$

Un tel vecteur aléatoire est dit *constant* si la fonction Y est constante.

Si chacune des variables aléatoires discrètes Y_i admet une espérance finie, on définit le vecteur espérance de Y en posant

$$\mathbb{E}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y_n) \end{pmatrix}.$$

Si toutes les covariances existent, la *matrice de covariance* de Y est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée Σ_Y, de terme général $\sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$.

La *variance totale* de Y est définie par $\mathbb{V}_T(Y) = \sum\limits_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i)$.

Dans la suite du problème, on suppose que $\mathbb{E}(Y)$ et Σ_Y sont bien définies.

II.A –

On admet que Y est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On admet aussi que $\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^\top$ est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont l'espérance, par définition, est également calculée terme à terme.

Q 16. Vérifier que Σ_Y est une matrice symétrique, que

$$\Sigma_Y = \mathbb{E}\Big(\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^\top\Big)$$

et que, si U est un vecteur constant dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y.$$

Q 17. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $Z = MY$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Justifier que Z admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$. Montrer que Z admet une matrice de covariance Σ_Z et que

$$\Sigma_Z = M\Sigma_Y M^\top.$$

II.B – Propriété des valeurs propres

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base orthonormée formée de vecteurs propres de Σ_Y.

On définit la variable aléatoire discrète $X = P^\top Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

Q 18. Démontrer que Σ_X est une matrice diagonale.

Q 19. En déduire que les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives.

Q 20. Démontrer que la variance totale de X est égale à celle de Y.

II.C – Étude de la réciproque

Soit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux λ_i sont tous positifs.

Q 21. Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Z à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Z = D$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives.

Q 22. Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A$.

II.D – Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $X = U^\top Y$.

Q 23. Montrer que X admet une variance et que

$$\mathbb{V}(X) = U^\top \Sigma_Y U.$$

II.E – Image de Σ_Y

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\mathbb{P}\big(Y - \mathbb{E}(Y) \in \operatorname{Im} \Sigma_Y\big) = 1.$$

On note r le rang de la matrice de covariance de Y.

Q 24. Traiter le cas où $r = n$.

On suppose maintenant $r < n$.

Q 25. Démontrer que le noyau et l'image de Σ_Y sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $d = \dim \ker \Sigma_Y$ et on considère une base orthonormée $(V_1, ..., V_d)$ de $\ker \Sigma_Y$.

Q 26. Démontrer que

$$\forall j \in [\![1, d]\!], \quad \mathbb{V}\Big(V_j^\top \big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = 0.$$

Q 27. En déduire que $\mathbb{P}\Big(V_j^\top \big(Y - \mathbb{E}(Y)\big) = 0\Big) = 1$.

Q 28. Conclure.

III Maximisation de la variance

Les notations sont celles de la partie II. On cherche un vecteur U unitaire tel que la variance de $U^\top Y$ soit maximale.

Comme en I.C, on note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$.

On note q_Y l'application de C dans $\mathbb{R}$ définie par $q_Y(U) = \mathbb{V}(U^\top Y)$.

III.A – Un exemple dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On pose $A_2 = \operatorname{diag}(9, 5, 4)$.

Q 29. Justifier l'existence d'un vecteur aléatoire dont A_2 est la matrice de covariance.

Q 30. Dans cette question uniquement, on suppose que Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A_2$. Déterminer le maximum de q_Y sur C.

III.B – Cas général

Q 31. Dans le cas général, démontrer que la fonction q_Y admet un maximum sur C. Préciser la valeur de ce maximum ainsi qu'un vecteur $U_0 \in C$ tel que

$$\max_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_0^\top Y).$$

III.C – Étude d'un exemple

On suppose, dans cette sous-partie III.C uniquement, que Σ_Y vérifie

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sigma_{i,i} = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \sigma_{i,j} = \sigma^2 \gamma$$

où σ et γ sont deux réels strictement positifs.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Q 32. Démontrer que $\gamma \leqslant 1$ et exprimer Σ_Y en fonction de J.

Q 33. Déterminer les valeurs propres de J et la dimension de chaque sous-espace propre associé. Déterminer également un vecteur propre associé à sa valeur propre de module maximal.

Q 34. Préciser un vecteur U_0 unitaire tel que la variance de $Z = U_0^\top Y$ soit maximale.

Q 35. Calculer le pourcentage de la variance totale représenté par Z, c'est-à-dire le rapport $\dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{V}_T(Y)}$.

III.D – On suppose, dans cette dernière sous-partie, que Σ_Y présente n valeurs propres distinctes qu'on classe par ordre strictement décroissant $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n$.

On se munit d'un vecteur U_0 tel que $\mathbb{V}(U_0^\top Y) = \max\limits_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y)$.

On note

$$C' = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1 \text{ et } U_0^\top U = 0\}.$$

Q 36. Justifier que q_Y admet un maximum sur C'.

Q 37. Déterminer la valeur de ce maximum et préciser un vecteur $U_1 \in C'$ tel que

$$\max_{U \in C'} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_1^\top Y).$$

Q 38. Calculer la covariance des variables aléatoires discrètes $U_0^\top Y$ et $U_1^\top Y$ (pour simplifier l'écriture, on pourra supposer Y centrée, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y) = 0$).

Ces questions de maximisation de la variance sont à la base de la méthode statistique d'analyse en composantes principales. Il s'agit de déterminer, à partir d'un certain nombre de variables aléatoires, des combinaisons linéaires (composantes principales) concentrant le maximum d'information et décorrélées entre elles.

• • • FIN • • •