

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet était composé d'un problème en cinq parties dont le thème principal était l'étude de la transformation de Fourier rapide (utilisée entre autres pour la compression d'images numériques). Une première partie permettait de faire quelques rappels et de (re)démontrer certaines propriétés usuelles sur les racines de l'unité et les coefficients de Fourier utiles pour la suite. Cette partie utilisait des techniques élémentaires et proches du cours.

La deuxième partie s'attachait à étudier la diagonalisation des matrices circulantes. Les dernières parties permettaient de détailler le processus de discretisation (partie 3), de l'améliorer à l'aide de l'algorithme (partie 4) et d'en donner une application dans la dernière partie.

Dans ce sujet, il y avait de nombreuses questions proches du cours qui recouvraient une grande partie du programme d'algèbre, du calcul intégrale élémentaire et quelques résultats usuels sur les séries de Fourier. Les nombres complexes et les calculs de somme tenaient une place importante dans le sujet.

Analyse globale des résultats

Le sujet était de longueur raisonnable. Les candidats ayant une bonne connaissance du cours et utilisant correctement les définitions rappelées dans l'énoncé pouvaient obtenir un résultat honorable.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Commentaires généraux

Compréhension du sujet

La bonne lecture du sujet et le respect des notations étaient encore une fois capitale pour bien pouvoir aborder cette épreuve. Il est regrettable qu'une grande partie des candidats ne différencie pas une puissance inverse et le conjugué d'un nombre complexe ou ne prennent en compte que le cas d'entiers positifs tout le long du sujet. La définition des coefficients de Fourier complexes était rappelée dans l'énoncé qui précisait bien une définition différente pour les coefficients d'indices positifs et négatifs.

Cours

Le jury rappelle à nouveau qu'une connaissance solide du cours de mathématiques des deux années est indispensable afin de bien figurer lors des concours. Les candidats sachant citer et reconnaître les théorèmes du cours ont pu se démarquer.

Ci-après quelques remarques non exhaustives sur les points de cours abordés lors du sujet et quelques remarques qui demandait à plusieurs reprises des questions de cours directes. Insistons sur le fait que l'utilisation d'un théorème doit s'accompagner de la vérification d'hypothèses.

- Les nombres complexes ne sont pas assez bien maîtrisés par l'ensemble des candidats. Le calcul des racines de l'unité (**Q 1.**) n'a pas souvent été correctement redémontré.
- Le théorème de Parseval (**Q 7.**) a souvent été cité correctement mais de nombreux candidats n'en avait pas connaissance. Certaines formules données n'avaient aucun sens.

- Les hypothèses permettant d'intégrer une fonction sur un segment (soit la continuité) ont souvent été oubliées (**Q 9.** notamment). De même, lors d'une intégration par parties il faut s'assurer du caractère C_1 des fonctions en jeu (**Q 10.**).
- Le théorème sur les sommes de Riemann (ou méthode des rectangles) n'a pas souvent été reconnu. Rappelons encore que l'hypothèse de continuité est requise pour son application.
- Certains candidats trouvent des espaces propres réduits au vecteur nul, ou des matrices de passage avec une colonne nulle.
- Certaines réponses étaient parfois confuses concernant le lien entre la diagonalisation et le caractère scindé du polynôme caractéristique. Rappelons que tous les polynômes non constants sont scindés sur \mathbb{C} mais que pourtant toutes les matrices complexes ne sont pas diagonalisables.

Calculs

- Le calcul des déterminants pour les matrices de taille 3 sont bien menés mais les candidats ont eu plus de difficulté avec des matrices de taille quelconque.
- Les calculs de sommes ont posé des difficultés à de nombreux candidats surtout lorsque des nombres complexes étaient en jeu.

Raisonnement

Beaucoup de copies ne sont qu'une succession de calculs sans aucune explication. La communication est une compétence importante pour un futur ingénieur. Un effort de clarté est attendu par le jury. En ce qui concerne la logique, il faut clairement préciser si le raisonnement se fait par équivalence, double ou simple implication. Un raisonnement par équivalence ne doit pas être confondu avec une simple implication. Dans le même registre, des difficultés d'expression dans la langue française ou de soin ont été remarquées (et pénalisées) dans plusieurs copies même si pour de nombreux candidats des efforts appréciables ont été remarqués.

Détails sur certaines questions

Partie I

- Q 1.** Il fallait détailler la recherche des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
- Q 3.** Une mauvaise de lecture d'énoncé fréquente a fait confondre aux candidats le nombre conjugué et l'inverse.
- Q 6.** et **Q 10.** Il ne fallait pas oublier de traiter le cas d'un entier négatif.
- Q 9.** Le jury attendait simplement que l'on fasse référence à la continuité de l'intégrante.

Partie II

Q 15. Une somme de matrices diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable. Il fallait expliciter le calcul à l'aide de la matrice de passage.

Pour la fin de la partie, les candidats étaient invités à généraliser les résultats précédents pour des matrices de taille quelconques. Les calculs matriciels devaient être détaillés une simple analogie n'était pas une preuve suffisante.

Q 24. On attendait un calcul détaillé en mettant en évidence le calcul des puissances d'une matrice diagonale.

Parties III, IV et V

Les dernières parties permettaient d'utiliser les résultats établis précédemment et ont été abordés correctement par les meilleurs candidats.

Dans **Q 28.**, **Q 31.**, **Q 41.** et **Q 43.** il était demandé de donner le nombre d'opérations nécessaires pour réaliser certaines transformations de Fourier discrètes. Certains candidats donnent une réponse à la volée sans aucune justification. Ce type de réponse ne peut pas être pris en compte. À l'inverse, des démarches argumentées ont été valorisées même si celles-ci n'étaient pas complètement abouties.

Conclusion

Ce sujet permettait de balayer une large partie des programmes des deux années. De nombreuses questions proches du cours et utilisant les définitions du cours ont permis aux candidats aux connaissances solides de se distinguer.