Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions. L'injectivité de cet opérateur est démontrée, cette propriété permet en fin de sujet de résoudre une équation et un système différentiels.

Ce sujet comporte quatre parties. Dans la première, on demande de démontrer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées. Dans la deuxième partie, on définit la transformée de Laplace, puis on la calcule pour certains exemples qui apparaitront dans la dernière partie. Dans la troisième partie, on démontre à l'aide d'une loi binomiale, un résultat d'approximation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par des fonctions polynomiales. Ce résultat permet dans la quatrième partie, de démontrer l'injectivité de la transformée de Laplace. Le sujet se termine par deux applications de cette propriété à la résolution de deux problèmes de Cauchy.

Cette épreuve fait appel à plusieurs notions importantes du programme de TSI : intégration, variable aléatoire discrète, équation différentielle, réduction d'une matrice.

Analyse globale des résultats

Le sujet fait appel à la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, notion qui est évoquée au programme sans y être approfondie ; le jury en a tenu compte. Les candidats n'ont pas semblé être perturbés et ont su se ramener à des fonctions à valeurs réelles en décomposant en partie réelle et imaginaire.

Cette épreuve a permis de classer les candidats. Les meilleurs d'entre eux sont repérés sans difficulté, ils ont mené à bien de nombreuses questions avec une rigueur remarquable et obtiennent une note brute bien au-dessus de la moyenne. Le sujet est bien calibré, il propose des questions très abordables ainsi que d'autres plus délicates que certains candidats seulement ont pu aborder. Le thème du sujet présente un intérêt certain pour les candidats de la filière.

Les candidats ont mis à profit leur entrainement dans l'année sur des annales de concours. Le sujet est consistant et de nombreuses questions ont été traitées surtout dans les parties II, III et IV.B contenant un nombre conséquent de questions classiques. La partie I contient une seule question **Q1** et consiste à démontrer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées. Cette question a été trop peu réussie, la plupart des candidats n'ont pas compris le sens de la première partie de **Q1** et ont seulement cherché à relier les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$. Beaucoup ignorent ce qu'est une intégrale convergente.

La partie III a été dans l'ensemble bien traitée par les candidats. La sous-partie IV.A plus délicate a permis de révéler les meilleures copies.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Remarques générales

Le jury relève de nombreuses difficultés en intégration, notion principale de cette épreuve. L'étude de la convergence d'une intégrale généralisée est mal maitrisée. Les nombreuses intégrations par parties sont souvent maladroitement menées et le calcul d'un crochet $[uv]_0^{+\infty}$ rappelé dans l'énoncé, est rarement bien justifié.

Quelques candidats répondent à certaines questions en recopiant simplement l'énoncé ou par une simple phrase affirmative sans justification. Par exemple, en **Q5**, répondre « $F_0(p) = \frac{1}{p}$ pour tout $p > 0$ » est correcte mais il faut savoir justifier ce résultat, le sujet le demande. En revanche, **Q20** est une conséquence de **Q19** et repose sur les propriétés de l'espérance et de la variance. Tous les candidats doivent être conscients que dans chaque réponse on attend un argument mathématique qu'il s'agisse d'une hypothèse de l'énoncé, d'un point de cours ou d'un résultat montré dans une question précédente.

Pour chaque question, une réponse partielle est valorisée ainsi que toute tentative pouvant mener à la réponse attendue.

Quelques candidats persistent à mal numéroter les pages et les questions, même si des progrès sont à signaler. Le jury insiste sur la nécessité d'une numérotation rigoureuse qui permette au correcteur de se repérer dans la copie. Si la plupart des candidats font un effort de présentation, la très mauvaise qualité de certaines copies a été sanctionnée.

Remarques sur certaines questions

II Transformée de Laplace, généralités

Q2. Il s'agit d'indiquer que la convergence absolue d'une intégrale entraine sa convergence après avoir remarqué que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)|\mathrm{e}^{-pt} = |f(t)\mathrm{e}^{-pt}|$. Beaucoup de candidats ont cherché à utiliser **Q1** alors qu'il n'y a pas de lien entre ces deux questions.

Q3. Certains candidats ignorent ce qu'est une application linéaire ou ne parviennent pas à l'expliciter dans le formalisme proposé. Les notations $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}(p)$ se confondent malheureusement dans beaucoup de rédactions proposées.

Q4 à **Q6.** Il faut montrer, outre la continuité de $f_n : t \mapsto t^n$, la convergence *absolue* de son intégrale sur $\mathbb{R}_+$. Les résultats de comparaison des fonctions intégrables sont trop peu souvent utilisés. Le calcul de $\mathcal{L}(f_0)$ ne peut être évité en invoquant le cours de sciences de l'ingénieur, il faut vraiment l'effectuer. En **Q6**, les étapes du calcul sont à justifier en particulier les valeurs des limites pour calculer le terme de bord.

Q8 et **Q9.** La valeur du module $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|$ quand $\theta \in \mathbb{R}$ est trop souvent inconnue et son calcul est source de difficulté. Le jury a noté trop d'inégalités portant sur des nombres complexes. Le lien entre **Q8** et **Q9** a été très souvent souligné, mais le calcul via les parties réelle et imaginaire rarement réussi.

Q10. La comparaison des fonctions intégrables est invoquée souvent avec maladresse, le candidat écrivant des inégalités portant sur les intégrales avant de montrer leur convergence.

Q11. Certains candidats proposent une fonction qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$ (par exemple, les fonctions inverse, logarithme, tangente...). Lire l'énoncé correctement est essentiel.

Q12 et **Q13.** Ces questions ont été bien traitées par les candidats qui ont fait l'effort de bien présenter les différentes étapes de calcul, mais souvent l'hypothèse principale n'est pas mentionnée.

III Approximation par des fonctions polynomiales

Q14. Question qui s'est révélée discriminante. Les candidats ne peuvent se contenter de la réponse $\deg(B_n^k) = n$ sans justification.

Q15. Beaucoup de candidats reconnaissent la formule du binôme de Newton (ou la loi binomiale). La citer convenablement est préférable.

Q16 à **Q18.** Beaucoup de candidats ont été déroutés par **Q16** qui est une question de cours. Le mot-clef « En déduire » aide à penser à invoquer la positivité de l'espérance pour montrer sa croissance. Le sujet propose ainsi une articulation du raisonnement qui constitue une aide à la résolution et dont les candidats devraient se saisir. Pour **Q18**, là encore, l'inégalité à démontrer est donnée, il fallait insister sur les étapes de raisonnement et de calcul : la positivité de la variance en combinant **Q16** et **Q17**, la croissance de la racine carrée, la relation $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ pour tout réel α.

Q21. L'inégalité des accroissements finis est mal connue, notamment ses hypothèses.

Q22. De nouveau, il s'agit d'expliciter des étapes de calcul en faisant preuve d'une capacité de synthèse des résultats antérieurs.

Q24. Question bien réussie, qui pouvait s'appuyer sur un tableau de variation ou un dessin de la parabole. Il ne faut pas se limiter à la recherche des points critiques mais montrer que le point critique donne un maximum.

Q25. Les quelques candidats qui ont abordé cette question ont eu du mal à passer correctement à la borne supérieure et n'ont pas justifié son existence.

IV Injectivité de la transformation de Laplace et applications

Q26. Cette question a été rarement bien traitée. Le théorème fondamental de l'analyse permettant de répondre à la question est mal connu des candidats. Le calcul de la dérivée de $g : t \mapsto \int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$ est approximatif.

Q27 et **Q28.** De $g \in E$, on pouvait en déduire que g est bornée, puis à l'aide de **Q26** et **Q10**, que $\mathcal{L}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Quelques candidats ont traité correctement ces deux questions. Un nombre plus important a réussi à démontrer la relation entre $\mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(f)$ mais en oubliant de faire appel à **Q27** pour justifier que $\lim_{t\to+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$ quand $p > 0$.

La continuité d'une fonction définie par morceaux est une notion mal assimilée par beaucoup de candidats.

Q30 à **Q34.** Ces questions, les plus difficiles de l'épreuve, mènent à prouver l'injectivité de $\mathcal{L}$. Peu de candidats les ont abordées correctement.

Q35 et **Q36.** La formulation de **Q35** a dérouté plusieurs candidats. Il s'agissait de les aider à déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (IV.1) pour la résoudre en **Q36**.

Q37 à **Q40** et **Q43** à **Q46.** Questions peu traitées et peu réussies mis à part les questions **Q38** et **Q44**.

Q41 et **Q42.** L'existence et la construction de la matrice de passage P sont mal justifiées. Beaucoup de candidats ont cru nécessaire de calculer P^{-1} alors qu'on l'utilise de manière abstraite. Le système différentiel $X' = AX$ équivaut au système différentiel $U' = DU$. La résolution de $U' = DU$ et la seule relation $X = PU$ permettent de calculer X sans avoir à inverser P.

Conclusion

Un grand nombre de questions de cette épreuve sont accessibles à la plupart des candidats. Elles ont été bien traitées par ceux d'entre eux qui ont fait l'effort, pendant l'année, de maitriser les notions enseignées et qui ont réellement cherché à comprendre la perspective du sujet, l'enchainement des questions et la manière dont il convenait de mobiliser le cours.

La longueur d'un sujet ne doit pas inciter à répondre précipitamment aux premières questions. Il faut absolument apporter des réponses complètes et précises même si cela empêche d'aller très loin dans le sujet. Une rédaction correcte et bien justifiée à une vingtaine de questions constituent déjà une très bonne copie.

Le jury conseille aux futurs candidats d'apprendre et comprendre le cours des deux années de classe préparatoire. Il faut savoir aussi à tout moment, l'appliquer à l'aide d'exercices types et d'exercices progressifs.