Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet de Maths 1 de la filière PSI 2024 étudie de manière indépendante les intégrales de Wallis, une équation différentielle puis une famille de polynômes orthogonaux pour un certain produit scalaire introduit dans le sujet.

Le problème est constitué de quatre parties comportant de nombreuses questions indépendantes des parties précédentes :

- une première partie porte sur les intégrales de Wallis ;
- une deuxième partie invite à la recherche de solutions développables en séries entières d'une équation différentielle et propose l'étude d'une fonction définie comme intégrale à paramètre ;
- une troisième partie amène les candidats à étudier les célèbres polynômes d'Hermite ;
- une quatrième et dernière partie, plus technique, a pour objectif de démontrer qu'une famille de polynômes est totale, notion qui est définie dans l'énoncé.

  Il était attendu des candidats qu'ils maitrisent bien plusieurs chapitres de leurs cours : algèbre linéaire (endomorphismes, réduction, polynômes), algèbre bilinéaire (produits scalaires, bases orthonormales, endomorphismes autoadjoints), analyse (suites, séries, séries entières, intégrales sur un segment, intégrales généralisées, intégrales à paramètres, équations différentielles).

Analyse globale des résultats

La première partie, qui proposait une étude des intégrales de Wallis et le calcul de l'intégrale de Gauss, a été réussie par une grande majorité des candidats. Les plus sérieux d'entre eux ont même pu traiter l'intégralité des questions de cette partie.

La deuxième partie a été également bien abordée par de nombreux candidats. On peut toutefois regretter que les théorèmes sur les intégrales à paramètres ne sont souvent pas connus précisément. Des réponses très pertinentes ont toutefois été fournies sur de nombreuses copies. Notons qu'une erreur s'était glissée dans l'énoncé de cette deuxième partie, proposant de résoudre une équation différentielle sur $\mathbb{R}[X]$ plutôt que sur $\mathbb{R}$. Lors de la conception du barème, l'équipe des correcteurs a envisagé plusieurs scénarios pour la répartition des points, suivant que les candidats identifiaient l'erreur d'énoncé et adaptaient leur raisonnement en conséquence, ou qu'ils ne s'apercevaient de rien et continuaient à travailler. Dans la pratique, très peu de candidats semblent avoir repéré ce problème.

La troisième partie a été traitée de manière inégale par les candidats. Si la première moitié (définition et propriétés des polynômes d'Hermite) a été globalement réussie, il n'en a pas été de même pour les sous-parties III.C et III.D, qui ont moins inspiré les candidats.

La quatrième et dernière partie a été très peu abordée, les candidats n'ayant sans doute pas eu le temps d'arriver jusque là.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre, des résultats encadrés, des erreurs barrées proprement. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir), barrer proprement les erreurs et encadrer leurs résultats.

- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (SRS pour « scindé à racines simples », par exemple) le sont nettement moins. De même, l'emploi d'abréviations telles que $\forall$, $\iff$ doit être modéré dans des explications, et ces symboles ne doivent figurer que dans des assertions ne contenant que des symboles mathématiques.

- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet) : les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.

- Lorsqu'une égalité entre deux ensembles est demandée et qu'un raisonnement par « double inclusion », est choisi, il est important de bien démontrer les deux inclusions, ou à défaut, de signaler que l'une d'entre elles est évidente si tel est le cas.

- Pour démontrer une équivalence entre deux propriétés, on peut raisonner directement par équivalence, ou raisonner par double implication. Mais montrer une seule implication ne suffit pas.

- À moins d'être évidente, une récurrence doit être correctement rédigée avec la présentation de la propriété à démontrer, la démonstration de l'initialisation, puis de l'hérédité, puis la conclusion. De même, si à l'issue de l'hérédité, les candidats constatent qu'ils n'ont pas utilisé l'hypothèse de récurrence, ils doivent corriger leur copie puisqu'il ne s'agissait donc pas d'un raisonnement par récurrence.

- Quelques erreurs ont été commises sur l'étude des suites de la première partie : par exemple, une suite décroissante n'est pas nécessairement convergente ; si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on n'a pas nécessairement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$.

- De même, il convient d'être précis dans les raisonnements sur les intégrales : par exemple, une primitive de $\cos^n$ n'est certainement pas $\frac{\cos^{n+1}}{n+1}$; la continuité de f doit être évoquée avant d'étudier la convergence d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$; il faut mentionner qu'on manipule des fonctions positives pour utiliser les théorèmes de comparaison ; un changement de variable est justifié si ce dernier est de classe $\mathcal{C}^1$; pour les intégrales généralisées, avant d'écrire la formule d'intégration par parties, il est nécessaire de vérifier que le crochet possède bien des limites en chaque borne ; l'intégrale d'un produit de fonctions n'est pas égale au produit des intégrales !

- Lors de la manipulation de polynômes, il faut éviter les erreurs suivantes : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ne signifie pas que $\deg(\mathrm{P}) = \mathrm{n}$, mais $\deg(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{n}$; écrire « $\deg(\mathrm{P}) = \mathrm{n}$ donc $\deg(\mathrm{P}') = \mathrm{n} - 1$ », ne fonctionne pas si P est un polynôme constant.

- Beaucoup de candidats ont vu dans la partie II un problème de Cauchy, avec une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la condition initiale $y(0) = 1$. Certains ont pensé à rajouter $y'(0) = 0$, mais l'annulation du facteur x en 0 devant y'' ne permettait pas, de toutes façons, de s'appuyer sur ce théorème.

- Pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il est fréquent d'essayer de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

- Dans la question 19, quelques erreurs auraient pu être évitées : il ne faut pas oublier de justifier l'existence de l'intégrale définissant le produit scalaire ; il ne faut pas oublier non plus l'hypothèse de continuité pour le caractère défini du produit scalaire ; enfin, il ne faut pas confondre les mots « linéaire » et « bilinéaire ».

- Dans la question 22, beaucoup de candidats ont affirmé que l'orthogonalité impliquait la liberté ! Il ne faut pas oublier de préciser que les vecteurs doivent être non nuls.

Conclusion

Le sujet qui touchait à de nombreux thèmes du programme de mathématiques de PSI a permis de mettre en évidence les compétences de tous les candidats. Les correcteurs ont notamment apprécié que certains d'entre eux traitent la première partie du sujet dans son intégralité. Quelques lacunes sur des notions de base ont toutefois été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maitrise du langage mathématique en général, et plus spécifiquement des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : manipulation des intégrales, des polynômes et des rudiments d'algèbre bilinéaire. Quelques candidats ont même abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet, et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Les correcteurs ont toutefois constaté cette année dans trop de copies une maitrise trop approximative de la rédaction (logique, double implication, récurrence...). Les candidats concernés, même si les idées générales de leurs réponses sont correctes, prennent le risque d'être pénalisés. Inversement, les copies qui proposent une rédaction agréable à lire en mêlant rigueur, justesse et clarté, ont plus de chance d'être notés favorablement par les correcteurs. Il est vivement conseillé aux candidats d'utiliser un brouillon et de ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées.