Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet proposé porte sur la série harmonique et la constante γ d'Euler. Les différentes parties permettent de balayer une très large partie du programme d'analyse (intégrales généralisées, intégrales à paramètre, séries numériques, suites et séries de fonctions, séries entières), ainsi qu'une partie du programme de probabilités (indépendance, loi géométrique, inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

La première partie permet classiquement d'introduire la constante d'Euler à l'aide d'une série télescopique.

La seconde partie introduit le problème du collectionneur de vignettes. Les questions permettent aux candidats de s'approprier progressivement le problème et de démontrer leur maitrise rigoureuse des techniques de base de probabilités. L'espérance du nombre de paquets à ouvrir pour obtenir n figurines fait le lien avec les sommes partielles de la série harmonique. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de conclure sur une convergence en probabilité.

La troisième partie permet d'obtenir une première expression intégrale de γ à l'aide d'une interversion série/intégrale.

La quatrième partie permet d'obtenir une seconde expression intégrale de γ par deux applications du théorème de convergence dominée.

La cinquième partie permet d'obtenir deux dernières expressions intégrales de γ en s'appuyant sur une étude classique de la fonction Γ.

La sixième partie permet, à partir d'expressions intégrales précédemment obtenues et de plusieurs intégrations par parties, de calculer une valeur approchée de γ à l'aide d'une somme.

Enfin, la septième partie s'intéresse au comportement aux bornes de son intervalle de convergence de la somme de la série entière $\sum \ln(n)x^n$.

Analyse globale des résultats

Le sujet proposé aux candidats pour cette session se présentait comme l'année précédente sous une forme assez longue, avec une difficulté raisonnable. De nombreuses questions sont classiques, et quelques questions plus pointues permettent aux meilleurs candidats de se mettre en valeur. Les copies étaient par conséquent assez fournies. Les candidats prenant le temps d'appliquer avec rigueur les techniques d'analyse du programme de classes préparatoires auront tiré leur épingle du jeu.

Un certain nombre de candidats a confondu diverses notions de convergence (convergence d'une intégrale, d'une suite d'intégrales, d'une série de fonctions...). Le jury ne peut qu'inciter les étudiants à bien réfléchir à la nature des objets étudiés à chaque question avant de se lancer.

Enfin, le jury déplore un certain nombre de copies assez faibles dans les questions de probabilités, sans corrélation avec le niveau affiché sur le reste de la résolution du problème. Les probabilités occupant une partie importante du programme de CPGE, elles ne peuvent être négligées dans la préparation aux concours.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Partie I

Q1. La recherche d'équivalent a été catastrophique. Seulement 17 % des candidats ont obtenu un résultat correct. Les principales sources d'erreurs ont été les manipulations de développements limités (somme d'équivalents ou autres). Trop de candidats ont remplacé $\frac{1}{n+1}$ par $\frac{1}{n}$ dans des développements à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$. Un nombre non négligeable de candidats se trompe dans le terme d'ordre 2 du développement limité de $\ln(1+x)$. De sérieux problèmes de calcul sont apparus également dans la distribution du signe moins dans une parenthèse, ou dans l'application du signe moins dans le développement limité de $\ln(1-x)$.

Pour la nature de la série, le critère de Riemann est bien maitrisé, mais moins de la moitié des candidats pense à préciser le signe constant du terme général ou la convergence absolue pour conclure à l'aide du critère d'équivalence.

Q2. Le lien suite-série est souvent connu. Il est régulièrement redémontré, ce qui est inutile puisqu'il s'agit d'un résultat du programme. On observe cependant dans un certain nombre de copies le raisonnement suivant (qui est bien sûr faux dans sa dernière étape) : $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge donc $a_{n+1}-a_n \to 0$, donc (a_n) converge (voire est constante à partir d'un certain rang). Une petite proportion des candidats s'essaye à une démonstration, pas toujours très heureuse, basée sur le théorème de la limite monotone.

Partie II

Q3. En général comprise. Cependant, cette question permet de voir des soucis de compréhension de la différence entre variable aléatoire et événement dans certaines copies. On voit de temps en temps apparaitre des lois uniformes.

Q4. La réponse à la première partie de la question a souvent été $\frac{1}{n^m}$. Peu de candidats arrivent à écrire proprement l'événement avec des unions et des intersections.

L'égalité entre les deux événements de la question n'est pas toujours vue. Les candidats doivent faire plus attention aux quantifications des variables : la première partie ne traitant pas le cas $m=1$, il fallait expliquer pourquoi la formule était toujours valable dans ce cas.

Q5. On observe beaucoup de décalages d'indice, ce qui amène régulièrement à des probabilités négatives par exemple, les candidats pourraient se poser la question de l'appartenance de leur résultat à $[0,1]$.

Le jury rappelle également aux candidats que la loi d'une variable aléatoire n'est pas toujours une loi usuelle. Il est regrettable de voir certains bons candidats donner le bon support de N_1, donner la bonne formule et conclure que N_1 suit une loi géométrique.

Q6. Le paramètre de la loi géométrique est assez peu souvent correct (on trouve régulièrement des paramètres supérieurs à 1, parfois négatifs). L'idée de premier succès est souvent citée, mais l'indépendance n'est pas assez invoquée.

Q7. Beaucoup de candidats ont tellement envie d'avoir le résultat final que certaines indépendances sont tout droit sorties de leur chapeau. Régulièrement, beaucoup de temps est passé à redémontrer l'espérance d'une variable géométrique, alors qu'elle est au programme.

Q8. L'indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires est souvent confondue avec l'indépendance deux à deux. Le jury a été confronté à beaucoup d'inepties dans les arguments avancés à cette question.

Q9. Un certain nombre de candidats tente de passer par la formule de König-Huygens, qui ne permet pas particulièrement d'avancer ici. En revanche, ceux qui avaient les bons éléments dans les questions précédentes s'en sortent en général.

Q10. Souvent traitée correctement. Pour invoquer le théorème d'encadrement ici, il faut penser à rappeler la positivité de la probabilité.

Q11. Question difficile, probablement la plus difficile du sujet, et très rarement traitée correctement. Beaucoup de candidats font des passages en force à la limite en reliant les questions **Q10.** et **Q17.**.

Partie III

Q12. - Q13. Les candidats s'en sortent souvent pour retrouver le résultat. En revanche, les justifications de la convergence des sommes géométriques (ou télescopiques) sous-jacentes sont régulièrement insuffisantes, de même pour la séparation de sommes dont on n'a pas encore établi la convergence.

Q14. Pour ceux qui ont traité la convergence de l'intégrale à part (ce qui n'était pas absolument nécessaire puisqu'elle peut aussi être justifiée par le théorème d'intégration terme à terme), il y a eu beaucoup de passages en force pour établir des o ou des $\sim$ aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Le théorème d'intégration terme à terme est mal maitrisé. Et les calculs finaux pour arriver à γ vont souvent un peu trop vite, ce qui fait perdre de la crédibilité à la démarche quand le résultat est donné dans l'énoncé.

Partie IV

Q15. On observe beaucoup de sommes d'équivalents et d'erreurs de signe.

Q16. Question relativement réussie

Q17. La formulation « sous forme d'une intégrale » est une erreur de l'énoncé qui a déstabilisé un certain nombre de candidats. Le jury l'a pris en compte dans son évaluation en valorisant ceux qui avaient cherché à obtenir une intégrale.

Le véritable résultat attendu (e^{-x}) est parfois donné sans justification ou fruit d'une composition sur des équivalents.

Q18. Énormément de candidats ont obtenu des limites différentes, selon le lien entre t et n, ce qui n'a pas de sens à t fixé, quand $n \to +\infty$.

Q19. On attendait une démonstration, et pas simplement l'invocation d'une inégalité connue de convexité. Beaucoup de candidats jouent le jeu d'une démonstration classique de première année à l'aide d'une étude de fonction, en manquant cependant souvent de rigueur.

Q20. Commentaire commun à toutes les questions d'intégration : on attend la continuité (par morceaux) de l'intégrande, l'intervalle d'intégration (et donc les bornes ouvertes), le signe positif (ou l'intégrabilité) pour les critères de comparaison, les croissances comparées si nécessaire. Il est rare d'avoir tous ces éléments réunis.

Q21. Question très mal traitée. Beaucoup de candidats invoquent une convergence dominée, ou l'utilisation de la limite simple de (f_n) pour conclure. La nullité de f_n sur la majeure partie de l'intervalle d'intégration est souvent ignorée ou négligée.

Q22. Les résultats sont assez étalés selon la maitrise de la convergence dominée, et la justification propre des hypothèses. En particulier, la convergence dominée ne peut pas s'appliquer sur un intervalle qui dépend de n. La domination de la partie nulle de f_n est souvent oubliée.

Q23. cf. **Q15**.

Q24. L'inégalité des accroissements finis est très mal connue, le jury rappelle que les épreuves de concours portent sur le programme des deux années de classes préparatoires ! La disparition des valeurs absolues pour aboutir au résultat final se fait souvent sans beaucoup de précautions.

Q25. Plutôt réussie par ceux qui ont compris comment exploiter les résultats des questions précédentes dans une convergence dominée.

Q26. Dans cette question bilan, on attend un peu d'efforts des candidats sur le rappel des questions où les divers résultats ont été obtenus

Partie V

Q27. Question très classique, les défauts principaux rencontrés dans les copies ont déjà été cités à la **Q20.**. Une minorité de candidats veut appliquer un théorème de continuité d'intégrales à paramètre, ce qui est un peu fort par rapport à ce qui est demandé.

Q28. Encore un classique. On sent d'ailleurs beaucoup de candidats dans la récitation. L'hypothèse d'intégrabilité de u est souvent oubliée. La dérivée est régulièrement fausse. L'intégrabilité de ϕ est souvent mal justifiée voire affirmée sans justifications.

Q29. Dernière question classique sur la fonction Γ. Le jury rappelle aux candidats qu'il y a des hypothèses de convergence à invoquer (d'au moins une intégrale et du crochet) avant d'écrire l'égalité de l'intégration par parties.

Q30. Assez rarement traitée proprement. La dérivation de la somme d'une série de fonctions est mal maitrisée.

Q31. Traitée plutôt correctement mais avec des justifications régulièrement insuffisantes

Q32. Traitée plutôt correctement mais, régulièrement, le nombre de signes moins est un peu trop variable.

Partie VI

Q33. Une minorité (non négligeable) suggère de prendre $A = 1$ dans la **Q26.**.

Q34. L'emploi du critère de d'Alembert est souvent insuffisamment rigoureux. En alternative, le théorème spécial des séries alternées est souvent utilisé sans justification des hypothèses vérifiées.

La somme est rarement trouvée, encore moins proprement justifiée.

Q35. cf. **Q29.**

Q36. Plutôt correct pour ceux qui l'ont traitée.

Q37. Rarement avancée. Il y a une erreur de signe devant $\dfrac{R(A)e^{-A}}{A^3}$ dans l'énoncé.

Partie VII

Q38. L'emploi du critère de d'Alembert est souvent insuffisamment rigoureux : les valeurs absolues sont souvent oubliées, on ne sait pas trop trop si le rayon est la limite de $|a_{n+1}/a_n|$ ou son inverse, on observe aussi des conditions nécessaires et suffisantes dans les conclusions de la règle de d'Alembert pour les séries numériques. L'argument $\ln(n) \sim \ln(n+1)$ est employé trop régulièrement sans justification.

Q39. Très rarement traitée correctement.

Q40. On observe de fréquentes confusions entre $\dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ dans les raisonnements des candidats.

Q41. Les candidats manquent souvent de rigueur dans l'application du produit de Cauchy.

Q42. Rarement traitée correctement.

Q43. Beaucoup trop de candidats se contentent de $|f-g| \to 0$ pour justifier $f \sim g$.

Q44. Rarement traitée rigoureusement

Q45. - Q48. Peu voire très peu traitées.

Concernant la forme, une quantité non-négligeable de copies ne respecte pas les standards de présentation qui peuvent être attendus pour de futurs ingénieurs : copie propre, écriture claire, lisible, propos structuré, mise en avant des résultats ; mais aussi des standards relatifs à un concours scientifique : répondre effectivement à la question posée, penser à conclure, citer les résultats ou les questions précédentes utilisés, vérifier les hypothèses de validité. Certains candidats abusent également de l'emploi d'abréviations dans leurs copies. Le jury déplore particulièrement cette année un refus fréquent des candidats de mettre des parenthèses dans les sommes derrière le symbole $\sum$, dont la portée devient alors assez variable, selon ce qui arrange le candidat.

Les copies incriminées sont pénalisées comme prévu dans la notice de l'épreuve. Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction sitôt l'énoncé entre les mains.

Conclusion

Le jury encourage les candidats à mettre l'accent sur la rigueur, que ce soit dans la connaissance des théorèmes du cours, ou dans la précision des explications et des justifications apportées dans leurs réponses. Dans un sujet où un certain nombre de résultats sont présents dans l'énoncé, il est primordial que les candidats mettent un point d'honneur à ne pas sauter d'étapes et à privilégier la qualité de la démonstration à la quantité de résultats, ils en seront récompensés.

Le jury recommande aux candidats de lire à l'avance les questions pour voir où le sujet les emmène, ce qui facilite la compréhension des attentes du sujet, l'appréhension de l'articulation entre les questions, et permet de ne pas employer trop tôt des arguments qui seront démontrés plus tard.

Enfin, le jury rappelle aux candidats que sont attendues des copies claires et bien rédigées, et des raisonnements honnêtes où les étapes sont proprement et précisément justifiées.