Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve introduit les nombres de Fubini comme le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble fini. Certaines propriétés de ces nombres sont démontrées. Ils interviennent en fin de sujet dans la construction d'un produit scalaire sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}_n[X]$.

Ce sujet comporte quatre parties. Dans la première, on calcule une somme à l'aide d'une famille de polynômes. Dans une deuxième partie, les nombres de Fubini F_n sont définis par une relation de récurrence, puis sont caractérisés à l'aide d'un dénombrement. On démontre aussi une expression de ces nombres comme une somme introduite dans la première partie. Grace à cette expression et à une interprétation probabiliste, on obtient une minoration des F_n. Dans la troisième partie, on détermine un équivalent de la suite (F_n) à l'aide d'une comparaison série-intégrale. Dans la quatrième partie, on construit une suite (P_n) de polynômes qui s'expriment en fonction des F_n. Le sujet se termine par la construction d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui rend la famille (P_n) orthonormée.

Cette épreuve aborde plusieurs notions importantes du programme des deux années de la filière TSI : polynôme, série entière, dénombrement, espérance d'une variable aléatoire discrète, intégrale généralisée, endomorphisme, produit scalaire, base orthonormée.

Analyse globale des résultats

Le sujet est parfaitement adapté pour cette filière. Équilibré tant au niveau de sa longueur qu'au niveau de son contenu, il est aussi progressif et il permet de valoriser à la fois les capacités à justifier une propriété et les compétences calculatoires.

Les questions sur le programme de première année ont été généralement mal traitées (**Q8.**,**Q27.**,**Q30.**, **Q34.**,**Q35.**). Il en est de même pour les nombreuses questions de cours ou ses applications directes (**Q2.**,**Q9.**,**Q13.**,**Q14.**...).

L'épreuve ne présentant pas de difficultés majeures et faisant appel à de nombreuses méthodes très classiques, un grand nombre de candidats a abordé la plupart des questions. Mais trop d'erreurs inattendues sont commises. À cela s'ajoutent un manque de rigueur et de justifications.

Toutefois le jury a corrigé un nombre conséquent de très bonnes copies qui progressent efficacement dans le sujet et proposent une rédaction claire et argumentée.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Remarques générales

Le jury a relevé un nombre conséquent de copies manquant de soin avec parfois une rédaction manquant de clarté. Beaucoup de fautes d'orthographe ont été relevées. La très mauvaise qualité de certaines copies a été sanctionnée. Les feuilles de brouillon distribuées doivent être utilisées pour que la copie soit claire et les résultats doivent être soulignés ou encadrés.

Beaucoup de candidats enchainent les calculs sans explication. La réponse à une question doit toujours être accompagnée de phrases justificatives.

Les confusions entre les symboles $\sum_{k\geqslant k_0}$ et $\sum_{k=k_0}^{+\infty}$ ont été sanctionnées. Une série est une suite. Le symbole $\sum_{k=k_0}^{+\infty}$ est un nombre, désignant la limite de la suite des sommes partielles. On peut l'écrire après avoir justifié la convergence de la série.

Dans la partie II, la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour un espace probabilisé apparait, alors que la notion de tribu n'est pas au programme de la filière TSI. Cette maladresse n'a aucune conséquence sur la compréhension des questions de probabilité. Aucun candidat ne l'a relevée et aucun n'a semblé être perturbé par la lettre $\mathcal{A}$ apparaissant qu'une seule fois.

Dans la partie III, l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée est mal maitrisée. L'oubli de la continuité a été sanctionnée. Les critères de comparaison pour les fonctions positives doivent être connus. Dans une intégration par parties, la convergence du crochet $[u\times v]_0^{+\infty}$ doit être justifiée. La fin de la partie III consiste à comparer une somme avec une intégrale pour déterminer un équivalent du nombre F_n. Certains candidats ont eu la bonne idée de faire un dessin. Malgré tout, toutes les étapes de la comparaison attendue doivent être démontrées.

Parmi les questions très classiques, certaines ne devraient poser aucune difficulté. En **Q17.**, on attend un tableau de variation de la fonction g_n pour déterminer son maximum. En **Q27.**, on rappelle qu'une application sur un espace vectoriel E est un endomorphisme d'un espace vectoriel E si $f : E \to E$ et f est linéaire. Trop souvent la preuve d'une de ces deux propriétés a été oubliée. En **Q35.**, il s'agit de décomposer un polynôme en une combinaison linéaire de la famille $(P_0, ..., P_n)$ définie précédemment et donc de démontrer que cette famille engendre l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarques sur certaines questions

Partie I - Préliminaires

Q2. Le domaine de définition de $D_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ a été trop rarement précisé.

Q3. Il s'agit de démontrer l'égalité des rayons de convergence des séries entières $\sum k^n x^k$ et $\sum k^{n+1} x^k$ à n fixé. L'égalité entre le rayon de convergence d'une série entière et de sa série dérivée a été très peu évoquée. On pouvait utiliser la règle de D'alembert mais beaucoup de candidats l'appliquent mal : oubli de la valeur absolue, confusion entre k et n, conclusion hasardeuse.

Q4. Le théorème de dérivation terme à terme pour les séries entières a été trop rarement cité, le domaine de validité de l'expression demandée, oubliée.

Q5. Dans l'initialisation de la récurrence, beaucoup de candidats ont mal lu la définition de la suite (D_n), la somme D_0 commence à $k = 0$ tandis que pour $n \geqslant 1$, le premier terme de D_n est x. Souhaitant arriver au résultat, certains de ces candidats ont interprété l'expression $G_n\left(\frac{x}{1-x}\right)$ comme le produit de G_n par $\frac{x}{1-x}$ alors que c'est une composition.

Partie II - Nombres de Fubini

Q7. - Q8. Les partitions ordonnés de $\{1, 2, 3\}$ du type $\{\{1\}, \{2, 3\}$ ou $\{\{2\}, \{1, 3\}$ sont très souvent oubliées. La question **Q8.** a été très peu traitée correctement.

Q9. - Q12. Une confusion entre développement limité et développement en série entière a été plusieurs fois relevée. Le calcul de la somme de la série $\sum \frac{(\ln(2))^k}{k!}$ a été bien réalisé. Par contre pour majorer la suite des sommes partielles de cette série, sa croissance a été rarement évoquée. Donner 0 comme minorant du rayon de convergence R de $\sum \frac{F_n}{n!} x^n$ ne suffisait pas. La question **Q11.** permettait de minorer R par $\ln(2)$ égal au rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{(\ln(2))^n}$. Pour aboutir à ce résultat, beaucoup de candidats ont écrit à partir de **Q11.** des inégalités fausses, une comparaison entre sommes partielles doit se faire avec les modules.

Q13. Trop peu de candidats ont pensé à appliquer le théorème du cours. La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. On en déduit simplement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = f^{(n)}(0)$ quand $a_n = \frac{F_n}{n!}$.

Q15. La plupart des candidats a cité le théorème de transfert avec son hypothèse de convergence mais souvent sans la justifier à l'aide de la question **Q3.** par exemple.

Q16. Certains candidats ont fait l'erreur d'écrire que $P(X \geqslant a) = P(X = \lfloor a \rfloor)$ pour avoir le résultat demandé connaissant la loi de X. D'autres assez nombreux, ont pensé à écrire $P(X \geqslant a) = P(X \geqslant \lfloor a \rfloor + 1) = \sum_{k=\lfloor a \rfloor+1}^{+\infty} P(X = k)$ et certains d'entre eux ont élégamment commencé le calcul par la décomposition $(X \geqslant a) = \bigcup_{k=\lfloor a \rfloor+1}^{+\infty} (X = k)$.

Q18. Il s'agissait de minorer $E(X^n)$ à l'aide de **Q15.** et **Q16.**. Quelques candidats ont appliqué l'inégalité de Markov qui n'est pas au programme. Le jury n'a pas pénalisé son utilisation.

Q19. Des erreurs de manipulation d'inégalités ont été souvent relevées. Il s'agissait de combiner les questions précédentes et de choisir la bonne valeur de a.

Partie III - Équivalent de F_n

Q20. - Q21. La convergence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t\ln(2)}\,\mathrm{d}t$ a été en général mal justifiée.

Les propriétés $\lim_{n\to+\infty} t^n e^{-t\ln(2)} = 0$ ou $g_n : t \mapsto t^n e^{-t\ln(2)}$ admettent un maximum sur $\mathbb{R}_+$, n'entrainent par la convergence de cette intégrale. On attendait la continuité de g_n sur $\mathbb{R}_+$ et une comparaison avec une fonction de référence intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'intégration par partie doit être justifiée. La valeur de I_0 a été trop souvent écrite sans démonstration, on souhaitait un calcul.

III.B Cette sous-partie a été souvent abordée mais rarement traitée correctement.

Partie IV - Une suite d'Appell

Q27. Outre la linéarité, il était attendu la justification de $\varphi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. De nombreuses confusions ont été repérées entre $\mathbb{R}_n[X]$ (notation pourtant rappelée en préambule) avec $\mathbb{R}[X]$ ou avec l'ensemble des polynômes de degré n. Les manipulations sur les degrés de somme de polynômes sont souvent erronées.

Q28. Question rarement traitée correctement. La propriété « 0 n'est pas valeur propre d'un endomorphisme implique son injectivité » est connue par un nombre conséquent de candidats.

Q29. Un raisonnement par l'absurde à l'aide de **Q28.** est efficace. Il a été réalisé par plusieurs candidats. Des confusions entre bijectivité et diagonalisibilité ont été relevées.

Q30. Peu de candidats ont pensé à montrer que φ_n est bijectif en remarquant que φ_n est un endomorphisme injectif sur un espace de dimension finie donc bijectif.

Q32. Le début de la question a été largement bien traitée. Elle permettait de faire apparaitre une somme télescopique pour prouver que $P_n(0) = F_n$ à l'aide de **Q13.**. Le résultat a été rarement obtenu correctement.

Q34. La formule de Taylor pour les polynômes au programme de première année est rarement connue.

Q35. Peu de candidats ont pensé à démontrer à l'aide de **Q31.** que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q36. Question très souvent abordée. Les axiomes définissant un produit scalaire sont connus. Mais trop souvent les candidats écrivent une inégalité stricte dans la positivité du produit scalaire. Le caractère défini n'a jamais été bien traité.

Q31. - Q33. - Q37. - Q38. Ces questions ont été peu abordées.

Conclusion

Contrairement aux années précédentes, le jury a rencontré très peu de copies ne contenant qu'une petite dizaine de questions traitées. Un très grand nombre de candidats ont abordé pratiquement toutes les questions, au risque d'en traiter certaines superficiellement. Les parties du programme sur les séries, les intégrales et l'algèbre linéaire sont mal maitrisées. Certaines notions vues en première année semblent être oubliées.

Apprendre et comprendre le cours reste essentiel pour pouvoir le restituer avec précision lors d'une épreuve de concours. On doit aussi retenir des règles et des méthodes mais il faut les comprendre et savoir quand les utiliser. Travailler le cours à l'aide de nombreux exercices sur toutes les parties du programme des deux années de classe préparatoire reste incontournable.