Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge si $x > 0$.

   Montrer que $f : x \mapsto -\ln(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x+1) - f(x) = \ln(x) \\ f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^{+*} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

3. Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

