Mathématiques 2

Oral

MP

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Indicatrice d'Euler

Dans ce sujet, n désigne un entier strictement positif.

1. *Cyclicité.* Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $g \in G$.

   a. Montrer que l'application $f_g : n \mapsto g^n$ de $\mathbb{Z}$ vers G est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ vers le groupe $(G, \cdot)$.

   b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f_g pour que g engendre G.

   c. Que peut-on dire sur g si f_g n'est pas injective ? et si de plus g engendre G ?

2. *Indicatrice d'Euler.* On rappelle que l'indicatrice d'Euler de n, notée $\varphi(n)$, est le nombre d'entiers $k \in [\![0, n-1]\!]$ premiers avec n.

   a. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(10)$ et $\varphi(p)$ pour p premier.

   b. Expliquer pourquoi l'algorithme suivant fonctionne en exhibant un invariant de boucle c'est-à-dire une propriété $P(i)$ qui est vérifiée à chaque étape de la boucle principale.

```
def premAvec(n):
    """Renvoie la liste des entiers 0 <= k < n premiers avec n"""
    if n == 1:
        return [0]
    table = [0] + [1 for i in range(1,n)]
    # objectif final: table[i] == 1 ssi pgcd(n,i) == 1
    for i in range(2, n//2 + 1):
        if table[i] == 1 and n%i == 0:
            for k in range(1, (n-1)//i + 1):
                table[k*i] = 0
    return [i for i in range(1,n) if table[i] == 1]
```

   c. Écrire une fonction Python `phi(n)` qui retourne l'indicatrice d'Euler de l'entier n représenté par l'objet python nommé `n` en utilisant la fonction `premAvec`.

   d. Calculer $\varphi(1024 \times 81)$ et $\varphi(1024)\varphi(81)$. Que conjecturez-vous ? Testez votre conjecture avec d'autres exemples.

   e. Démontrer cette conjecture.

3. *Convolution.* On note $+$ l'application habituelle sur l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ des applications de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{C}$. De plus, pour deux applications f et g de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, on définit la convolée de f et g par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

   a. Montrer, en rappelant oralement tous les points mais ne détaillant que ceux qui sont non-triviaux, que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}, +, *)$ est un anneau commutatif et préciser l'élément neutre de $*$ qu'on note δ.

   b. On notera $\mathbf{1}$ l'application constante sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ égale à 1 et Id l'élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ défini par $n \mapsto n$. On admet que $\mathbf{1} * \varphi = \mathrm{Id}$.

   On définit la fonction $\mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ainsi : si n est divisible par un carré de nombre premier, $\mu(n) = 0$, sinon $\mu(n) = (-1)^k$, où k est le nombre de diviseurs premiers de n.

   Démontrer que $\mu * \mathrm{Id} = \varphi$.