Mathématiques 2

Oral

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

MP

Les questions qui utilisent Python sont indiquées par le signe `[P]`. Une question marquée `[P?]` signifie qu'on *peut* utiliser Python, mais qu'il sera éventuellement demandé des explications mathématiques complémentaires.

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec n dans $\mathbb{N}^*$.

On appelle *centro-tranposée* de A la matrice $\widehat{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\hat{a}_{i,j}=a_{n+1-i,n+1-j}$

On appelle *centro-tranposition* l'application $A\mapsto\widehat{A}$.

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } j=n+1-i\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Par exemple (si $n=4$), on a $J_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ et si $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$ alors $\widehat{A}=\begin{pmatrix}16&15&14&13\\12&11&10&9\\8&7&6&5\\4&3&2&1\end{pmatrix}$.

1. a. `[P]` Écrire une fonction, sur le modèle `def J(n):...` renvoyant la matrice J_n.

   b. `[P]` Écrire une fonction `randMatrix` (d'arguments n,p) et renvoyant une matrice pseudo-aléatoire de taille $n\times p$, à coefficients dans l'intervalle d'entiers $[\![0,100[\![$.

   Utiliser cette fonction pour conjecturer le rapport entre J_n et l'application $A\mapsto\widehat{A}$.

   Justifier mathématiquement le résultat conjecturé.

   c. `[P]` Écrire une fonction, sur le modèle `def centro(A):...`, d'argument une matrice A et renvoyant $\widehat{A}$.

2. a. Montrer que l'application $A\mapsto\widehat{A}$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   b. Montrer que $\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\widehat{AB}=\widehat{A}\widehat{B}$ et que $\forall A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\widehat{A^{-1}}=\widehat{A}^{-1}$.

   c. Montrer que pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\widehat{{}^tA}={}^t\widehat{A}$.

   On peut donc dire que la centro-transposition commute avec la transposition.

   d. Montrer que pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det\widehat{A}=\det A$.

3. On définit $\begin{cases}\mathcal{C}_n^+=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\widehat{A}=A\} & \text{(matrices « \textit{centro-symétriques} »)}\\ \mathcal{C}_n^-=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\widehat{A}=-A\} & \text{(matrices « \textit{centro-antisymétriques} »)}\end{cases}$

   a. Montrer que $\mathcal{C}_n^+$ et $\mathcal{C}_n^-$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   b. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=(\mathcal{S}_n\cap\mathcal{C}_n^+)\oplus(\mathcal{S}_n\cap\mathcal{C}_n^-)\oplus(\mathcal{A}_n\cap\mathcal{C}_n^+)\oplus(\mathcal{A}_n\cap\mathcal{C}_n^-)$.

   Préciser la dimension des sous-espaces de cette somme directe (raisonner suivant la parité de n).

   c. `[P]` Écrire une fonction, sur le modèle `def decomp(A):...` d'argument A et qui renvoie le quadruplet des composantes de A sur la somme directe précédente. Donner un exemple (non trivial).

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note Q_n la matrice d'ordre $2n$ définie par $Q_n = \begin{pmatrix} I_n & -J_n \\ J_n & I_n \end{pmatrix}$.

   a. `[P]` Écrire une fonction, sur le modèle `def Q(n):...`, renvoyant Q_n.

   b. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{2}} Q_n$ est orthogonale.

   c. Soit M une matrice de $\mathcal{C}_{2n}^+$, définie par blocs d'ordre n sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

   Déterminer une relation entre D et A d'une part, entre C et B d'autre part.

   Former $N = \frac{1}{2} {}^t Q_n M Q_n$. En déduire $\det M = \det(A + BJ_n) \det(A - BJ_n)$.

5. `[P ?]` Étudier la diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -9 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 3 \\ 6 & -9 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.