Mathématiques 2

Oral

MP

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Dans cet exercice on considère l'équation différentielle linéaire

$$(\mathcal{E}) \quad : \qquad (1-x)^3 y''(x) = y(x)$$

On note f l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

1. a. Justifier l'existence de cette fonction.

   b. En utilisant la méthode d'Euler, tracer une approximation du graphe de f sur $[0; 0{,}9]$.

2. a. Justifier que $f \in C^\infty(]-\infty, 1[, \mathbb{R})$.

   b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

   Établir que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence liant a_{n+2}, a_{n+1}, a_n et a_{n-1} pour tout entier $n \geqslant 1$.

   c. Calculer alors a_n, pour tout $n \in [\![0, 20]\!]$.

   d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 4^n$.

   e. Qu'en déduit-on en ce qui concerne la fonction f ?

3. Que peut-on dire du signe de f sur $[0, 1[$.

4. Démontrer que pour tout $x \in [0, 1[$

   $$f(x) \geqslant x + \int_0^x \frac{(x-t)t}{(1-t)^3}\,\mathrm{d}t$$

   Calculer cette dernière intégrale. Que peut-on en déduire concernant le comportement de f en 1^- ?