Mathématiques 2

Oral

MP

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Un pion se trouve à l'instant 0 sur la case 0 d'un parcours linéaire dont les cases sont numérotées par les entiers consécutifs. À chaque étape, il avance d'un nombre strictement positif aléatoire de cases. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n le nombre de cases dont il avance à la n-ième étape. Ainsi, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ est sa position à l'instant n avec $S_0 = 0$ par convention. On suppose que les variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes. On note par conséquent

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad f_i = P(Y_n = i) \qquad \text{et} \qquad f : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k t^k$$

respectivement la loi et la fonction génératrice de Y_n. Par hypothèse, f_i ne dépend pas de n, et $f_0 = 0$.

1. Dans cette question, on suppose que $Y_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on choisit un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
   a. Écrire une fonction en python prenant en argument les paramètres p et k et simulant l'expérience jusqu'à ce que le pion dépasse (au sens large) la position k. La fonction renverra 1 si le point a atterri sur la case k et 0 s'il l'a dépassée sans s'y arrêter.

      Pour simuler une loi de Bernoulli, on pourra utiliser le volet probabilité de l'aide documentaire.

   b. Pour un entier k assez grand et des valeurs de p de votre choix, calculer sur une centaine d'essais la proportion de tentatives pour lesquelles le pion atteint la position k exactement. Comparer avec $1/E(Y_1)$.

Pour tout entier k, on note $E_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (S_n = k)$ et $u_k = P(E_k)$.

Ainsi, u_k est la probabilité que le pion passe par la case k lors de son parcours.

2. Soient $1 \leqslant j \leqslant k$. Démontrer que $P(E_k \cap (Y_1 = j)) = f_j u_{k-j}$.
3. En déduire que $u_k = f_k u_0 + f_{k-1} u_1 + \cdots + f_1 u_{k-1}$.

On note u la fonction génératrice de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$u : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$$

4. Justifier que u est bien définie sur $]-1,1[$ et que

$$\forall t \in\,]-1,1[, \qquad u(t) = \frac{1}{1-f(t)}$$

5. En déduire l'expression de u, celle de u_k en fonction de k et enfin la limite de cette suite lorsque k tend vers $+\infty$ dans les deux cas suivants :
   a. Y_1 suit une loi géométrique de paramètre p ;
   b. $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p, comme à la **question 1**.

   Déterminer par ailleurs $E(Y_1)$ dans les deux cas. Que remarque-t-on ?