CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 1

MP

Énoncé

- La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel, à savoir $(A, B) \longmapsto \operatorname{tr}(A^\top \cdot B)$.

- On note F_n le sous-espace vectoriel engendré par le groupe spécial orthogonal d'indice n : $F_n = \operatorname{Vect}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$.

1. Établir que $F_2 = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$.

Dorénavant, $n \geqslant 3$.

2. a. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

   b. Prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3. En déduire que $F_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indications fournies aux candidats lors de l'épreuve

Question 2a

On pourra admettre que $\det(\mathrm{e}^M) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(M)}$ pour toute matrice carrée M.

Question 3

Remarquer que $F_n^\perp \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$: pour cela on pourra dériver $t \mapsto (M \mid \exp(tA))$ pour toute $M \in F_n^\perp$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Si D est une matrice diagonale appartenant à $F_n^\perp$, expliquer pourquoi $D = 0$ et montrer enfin que $F_n^\perp = \{0\}$.