CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 2

PC

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
from numpy.polynomial import Polynomial
from math import *
```

1. Vérifier que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
   a. Trouver une relation entre I_n et I_{n-2}.

      Écrire une fonction récursive `Calcul(n)` qui renvoie la valeur de I_n.

   b. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Écrire une fonction `ps(P,Q)` qui renvoie le produit scalaire ci-dessus de P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec l'aide de la fonction `Calcul`.
4. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1/2$ et

$$\forall n \geqslant 2, \quad P_n' = P_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

   a. Exprimer P_n en fonction de P_{n-1}.

   b. Écrire une fonction `Poly1(n)` qui renvoie la valeur de P_n.

   c. Calculer P_n pour $n \in [\![0,5]\!]$ et $\langle P_i, P_j\rangle$ pour $(i,j) \in [\![0,5]\!]^2$.
5. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

   a. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)$$

   b. Trouver une relation entre H_{n+2}, H_{n+1} et H_n.

   c. Écrire une fonction `Poly2(n)` qui renvoie la valeur de H_n.

   d. Calculer H_n pour $n \in [\![0,5]\!]$ et $\langle H_i, H_j\rangle$ pour $(i,j) \in [\![0,5]\!]^2$. Observation.