Mathématiques 2

Oral

PC

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

Soit $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$. On considère la matrice $A(a_1, .., a_n)$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

1. On suppose dans cette question que $n = 4$.

   a. Écrire une fonction `Python` de paramètre (a, b, c, d) qui calcule la matrice $A(a, b, c, d)$.

   b. Donner les valeurs propres des matrices $A(1, 2, 3, 4)$, $A(4, 2, 3, 1)$ et $A(-3, -1, 1, 2)$.

      En déduire une conjecture sur les valeurs propres de la matrice $A(a, b, c, d)$.

   c. Donner les vecteurs propres des matrices $A(1, 2, 3, 4)$, $A(4, 2, 3, 1)$ et $A(-3, -1, 1, 2)$.

      On pourra faire des rapports des coordonnées d'un vecteur pour l'identifier.

      Que peut-on dire de la matrice dans ces trois cas ?

2. Montrer les conjectures précédentes dans le cas général.

3. On suppose que les réels $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont strictement positifs et que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

   Que peut-on dire de la suite $(A(a_1, .., a_n)^m)_{m\in\mathbb{N}}$?