Mathématiques 2

Oral

PC

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 si pour tout $(a,b)\in[0,1]^2$ tel que $a\leqslant b$

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\{k\in[\![1,n]\!]/\{u_k\}\in[a,b]\}\xrightarrow[n\to\infty]{}b-a$$

où l'on a noté, pour tout réel x, $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ sa partie fractionnaire. On pose, pour tout entier $n\geqslant 1$ et $(a,b)\in[0,1]^2$ tel que $a\leqslant b$,

$$c_n(a,b)=\mathrm{Card}\{k\in[\![1,n]\!]/\{u_k\}\in[a,b]\}$$

1. Soit $u=\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$.

   a. Quel est l'ensemble des suites réelles w telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_{n+2}=w_n+w_{n+1}$?

   b. Montrer alors qu'il existe v de limite nulle telle que $u+v$ soit à valeurs entières.

   c. En déduire que u n'est pas équirépartie.

2.

   a. Écrire une fonction Python d'arguments u, n et a,b permettant de calculer $c_n(a,b)$.

   b. On fixe ici $u=(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ et $[a,b]=[0,1/2]$. Faire afficher les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que conjecturez-vous ?

   c. On fixe ici $u=(\ln n)_{n\geqslant 1}$ et $[a,b]=[0,1/2]$. Faire afficher les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que conjecturez-vous ?

   d. On fixe ici $u=\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ et $[a,b]=[0,1/2]$. Faire afficher les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que constatez-vous ? Tester ensuite avec un autre choix de $[a,b]$.

3. On montre désormais que $u=(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1. Pour cela, on fixe deux réels a et b tels que $0\leqslant a\leqslant b<1$ ainsi qu'un entier $n\geqslant 3$.

   a. Montrer que, si $k\in[\![1,n]\!]$ est tel que $u_k\in[a,b]$ alors il existe $p\in[\![1,\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]$ tel que $(p+a)^2\leqslant k\leqslant(p+b)^2$.

   b. En déduire que $c_n(a,b)\leqslant\displaystyle\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}(b^2-a^2+1+2p(b-a))$.

   c. Réciproquement, montrer que si k est un entier tel qu'il existe $p\in[\![1,\lfloor\sqrt{n+1}-1\rfloor]\!]$ tel que $(p+a)^2\leqslant k\leqslant(p+b)^2$ alors $u_k\in[a,b]$ et $k\in[\![1,n]\!]$.

   d. En déduire que

$$c_n(a,b)\geqslant\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-1}(b^2-a^2-1+2p(b-a))$$

   e. Conclure que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie.