Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import math
import scipy.optimize as resol
import matplotlib.pyplot as plt
```

On considère sur $\mathbb{R}^+$ l'équation, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0 \qquad (\mathcal{E}_n)$$

1. Montrer que $\mathcal{E}_n$ admet une unique solution notée u_n, pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. Afficher les 100 premières valeurs approchées de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, en utilisant :
   a. La fonction `fsolve` du fascicule ;
   b. une implémentation de recherche dichotomique.
3. Que peut-on raisonnablement conjecturer ? Démontrer rigoureusement ce fait.
4. Écrire une fonction `binome` telle que `binome(n,p)` calcule $\binom{n}{p}$ pour tout entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.
5. a. Montrer la convergence et vérifier avec le logiciel pour quelques valeurs de $p \geqslant 1$, la relation
   $$u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)+1} \times n} \binom{n(p+1)}{n-1} \qquad (\mathcal{T}_p)$$
   b. Montrer la relation, pour tout entier $n \geqslant 1$
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k+1}k} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{2^{2n+3}(n+1)} \binom{2(n+1)}{n}$$
   c. En déduire la relation $\mathcal{T}_1$.
6. a. Vérifier avec le logiciel que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 0$ et
   $$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_n^5)$$
   converge vers le réel u_4.
   b. Démontrer avec soin cette propriété et en déduire un autre algorithme très simple qui permet d'approcher u_p, pour tout entier $p \geqslant 1$.
7. On pose $b_n = u_n - \dfrac{1}{2}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$.