CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

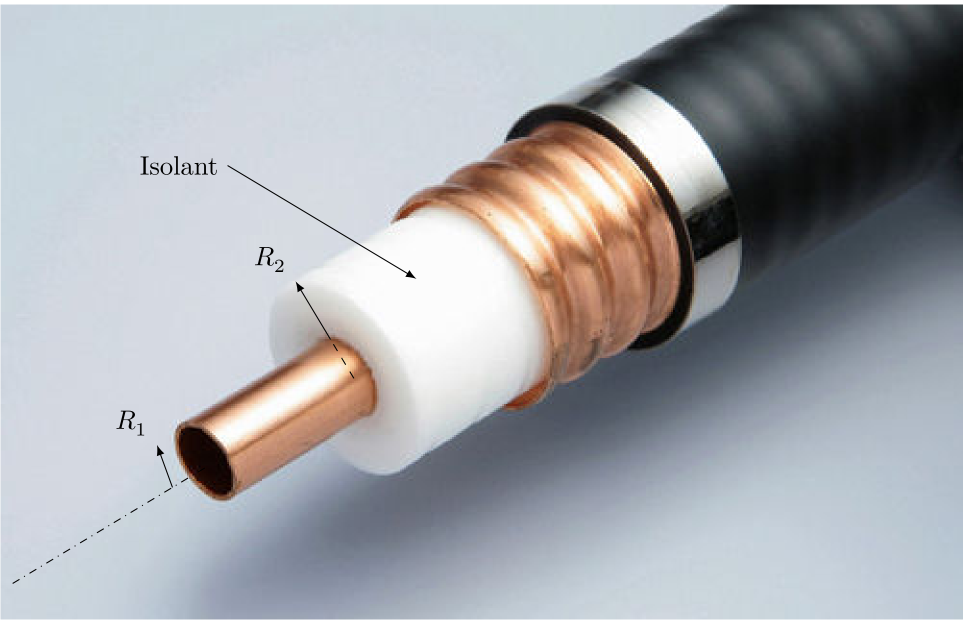
Oral

Physique 1

PC

Câble coaxial

On s'intéresse à un signal transporté via un câble coaxial, de grande dimension selon son axe $z'z$, et constitué de deux surfaces cylindriques parfaitement conductrices, de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. L'espace entre les conducteurs est un isolant de permittivité diélectrique absolue $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ et de perméabilité magnétique μ_0. Dans ce milieu, on admet que l'on peut utiliser les résultats établis dans le vide en remplaçant la permittivité du vide ε_0 par la permittivité absolue du milieu $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.



Le conducteur interne achemine dans le sens des z positifs un courant alternatif sinusoïdal d'intensité

$$\underline{I} = \underline{I}_m(z)e^{\mathrm{i}\omega t}$$

et le conducteur externe un courant exactement opposé. Entre les conducteurs, le champ électrique s'écrit

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}_0(r,z)e^{\mathrm{i}\omega t}\vec{u}_r$$

1. Montrer que $\underline{I}_m(z)$ obéit à une équation différentielle dont une solution est $\underline{I}_m(z) = I_0 e^{-\mathrm{i}kz}$ où I_0 est une constante et k une fonction de ω que l'on déterminera.
2. a. Caractériser le champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ dans l'espace entre les conducteurs.
   b. Déterminer la puissance électromagnétique moyenne $\langle P\rangle$ transportée dans l'isolant.

Données

$f = 100\,\mathrm{MHz}$, $\varepsilon_r = 3$, longueur du câble $= 200\,\mathrm{m}$, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$, $\varepsilon_0 = 8{,}84\times10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m}$.
On donne en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial F_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_r}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}$$