Oral

Mathématiques 2

PC

Soient a et b deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les matrices A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les termes diagonaux qui sont égaux à 1, de plus les termes de la première ligne et la première colonne (non diagonaux) sont alternativement égaux à b et à a.
On a par exemples pour $n = 5$ et $n = 6$:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a & b \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Que peut-on dire de ces matrices ?

2. Écrire une fonction Python de paramètres a, b et n qui renvoie la matrice A_n.

3. Calculer les valeurs propres et le déterminant des matrices A_n pour $n \in [\![3, 7]\!]$ et $(a, b) \in \{(2, 3), (1, 2), (-1, 2)\}$.

4. Calculer les valeurs propres et le déterminant dans le cas général.

5. Donner une base de vecteurs propres de l'espace propre associé à la valeur propre multiple.

6. Dans cette question on suppose que $n = 4$.
   Après avoir calculé quelques cas particuliers à l'aide d'un logiciel, donner une base de vecteurs propres de A_4 suivant les valeurs de a et b.

7. La matrice est-elle toujours diagonalisable dans le cas où a et b sont des complexes ?