Oral

Mathématiques 2

PC

On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_0(x) = 1 \quad \text{et pour } n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $x \in [0,1]$, calculer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x)$ s'écrit sous la forme $\alpha_n x^{\beta_n}$.
   Déterminer des relations de récurrence pour α_n et β_n.

2. Calculer β_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la limite de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Écrire une fonction `alpha(n)` qui renvoie α_n.
   Représenter graphiquement les termes de la suite $(\alpha_n)_{n\in[\![1,20]\!]}$.
   Conjecturer la limite de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Représenter graphiquement les fonctions $(f_n)_{n\in[\![1,20]\!]}$. Qu'observez vous ?

5. Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(\alpha_n) = -\sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}\ln(1 - 2^{-n-1+k})$$

   En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Calculer sa limite.

6. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.