CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 2

PC

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$.
On pose

$$\forall n \geqslant 1 \qquad X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Pour X variable aléatoire avec $X(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right)$$

1. Justifier

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(X_n \in [-1,1]) = 1$$

2. Pour $n \geqslant 1$, soit $(X_{n,k})_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X_n. Justifier que pour tout t réel

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos(tX_{n,k}) - \mathbb{E}(\cos(tX_n))\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

3. On fixe $N = 1000$. Représenter sur une même figure, pour $n \in [\![3,10]\!]$, le graphe de $t \mapsto \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\cos(tX_{n,k}(\omega))$ sur $[-10,10]$ avec $\omega \in \Omega$. Que peut-on conjecturer ?

4. Déterminer une expression de $\Phi_{X_n}(t)$ pour tout $n \geqslant 1$ et t réel.

5. Représenter simultanément les graphes Φ_{X_n} pour $n \in [\![3,10]\!]$ sur $[-10,10]$. Que peut-on conjecturer ?

6. Pour $n \geqslant 1$ et t réel, en considérant $\sin(t/2^n) \times \Phi_{X_n}(t)$, déterminer une expression simple de $\Phi_{X_n}(t)$ puis montrer la conjecture précédente.

7. Justifier que X_n et $-X_n$ ont même loi pour tout $n \geqslant 1$.

8. En déduire une démonstration du résultat conjecturé à la **question 3**.

9. À l'aide des résultats précédemment obtenus, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n \sin(tX_n))$ pour tout t réel puis le vérifier par simulation.

On rappelle que la fonction `mean` de la bibliothèque python `numpy` permet de calculer la moyenne des éléments d'une liste ou d'un tableau (voir **fiche sur le calcul matriciel**).