



Soit  $n \geq 2$ ,  $p \in ]0, 1[$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ . Soit  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0, 1\})$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$  définis par

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad M = U(U^T)$$

1. Trouver la loi de probabilité de  $\text{rg}(M)$  et de  $\text{tr}(M)$ .
2. Quelle est la probabilité que  $M$  soit une matrice de projection ?
3. Si  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , on note  $S$  la variable aléatoire  $S = V^T M V$ .

Calculer l'espérance et la variance de  $S$  pour  $n = 2$ .