Mathématiques 2

Oral

TSI

Soit a un réel. On définit la matrice $M(a)$ par $M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a)$.
2. On suppose $(a-1)^2 - 4 < 0$. Montrer que $M(a)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On suppose $(a-1)^2 - 4 > 0$. Montrer que $M(a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Dans cette question on suppose que $a = 3$. On appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M(3)$. Montrer que u n'est pas diagonalisable. Montrer ensuite qu'il existe une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. Dans cette question on suppose que $a = -1$. On appelle v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M(-1)$. Montrer que v n'est pas diagonalisable. Montrer ensuite qu'il existe une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$