$E = \mathbb{R}[X]$.

1. Soit n un entier positif ou nul. Montrer que lorsque $t \to +\infty$, $t^n \mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   En déduire que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. Calculer I_n pour $n = 0, 1, \dots, 8$.

3. On considère l'application φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ où P et Q sont deux éléments de E.

   Montrer que pour tous polynômes P et Q cette intégrale est bien convergente.

   Montrer que φ est un produit scalaire.

   On suppose désormais que E est muni de ce produit scalaire et on pose $\varphi(P, Q) = < P, Q >$.

4. On considère $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ avec $P_0 = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$.

   Construire une base orthonormale de F pour le produit scalaire défini précédemment à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).

5. Déterminer la projection orthogonale du polynôme constant P_3 défini par $P_3(X) = X^3$ sur F.